Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП
_____________ /С.М.Дудаков/
«01» февраля 2024 года

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки
02.03.02 ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ИНФОРМАТИКА
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Направленность (профиль)
Программная инженерия в искусственном интеллекте

Для студентов 1 и 2-го курса
Очная форма

Составитель: В.И. Климок

Тверь, 2024

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является:

– развитие математической культуры, общей культуры мышления;

– владение математическими методами, которые используются при решении прикладных задач и во всех других изучаемых дисциплинах, в которых применяются любые математические методы.

Задачами освоения дисциплины являются:

– всестороннее изучение функций и функциональных зависимостей;

– изучение методов, задач и теорем математического анализа;

– изучение неопределённых и определённых интегралов, несобственных интегралов, интегралов, зависящих от параметра, кратных интегралов, криволинейных и поверхностных интегралов, рядов Фурье и их применение к решению задач прикладной математики.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Математический анализ» относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1.

Дисциплина находится в логической и содержательно-методической взаимосвязи и требует знаний и умений, формируемых в результате освоения школьной программы по элементарной математике и необходима как предшествующая для множества дисциплин, использующих математический аппарат, изучаемых в дальнейшем.

3. Объём дисциплины: __18__ зачетных единиц, __648__ академических часов, **в том числе:**

контактная аудиторная работа: лекции __187__ часов, практические занятия __155__ часов;

контактная внеаудиторная работа: контроль самостоятельной работы 20 часов, в том числе курсовая работа 10 часов, расчетно-графическая работа 10 часов;

самостоятельная работа __286__ часов, в том числе контроль __142__ часа.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине**
Код и наименование компетенции	*Индикаторы достижения компетентности в соответствии с учебным планом*
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических наук; ОПК-1.2. Использует базовые знания в области математических наук в профессиональной дея-

в профессиональной деятельности	тельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности; ОПК-1.3. Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических наук к решению задач профессиональной деятельности.

5. Форма промежуточной аттестации: РГР (1 семестр), курсовая работа (3 семестр), экзамен (1, 2, 3, 4 семестры).
6. Язык преподавания русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)					Самостоятельная работа, в том числе Контроль (час.)
		Лекции		Практические занятия		Контроль самостоятельной работы (в том числе курсовая работа, РГР)	
		всего	в т.ч. практическая подготовка	всего	в т.ч. практическая подготовка		
Первый семестр							
1. Введение. Определение иррационального числа. Сечения. Основная теорема Дедекинда. Границы числовых множеств. Функции натурального аргумента.	13	3		3			7
2. Важнейшие классы функций. Элементарные, обратные, обратные тригонометрические функции. Суперпозиция функций.	32	10		10			12

3. Теория пределов. Определение предела последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Теоремы о пределах. Свойства функций, имеющих конечный предел. Неопределённые выражения. Число e. Принцип сходимости. Условия существования конечного предела. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших.	35	9		9			17
4. Непрерывность функции одной переменной. Непрерывность и разрывы функции. Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов. Непрерывность элементарных функций. Наибольшее и наименьшее значения функции. Понятие о равномерной непрерывности. Существование обратной функции.	28	8		8		10	2
Всего	*108*	*30*		*30*		*10*	*38*
Второй семестр							
5. Дифференцирование функции одной переменной. Производная и дифференциал первого порядка. Производная сложных и обратных функций. Производная и дифференциал высших порядков. Дифференциалы как источник приближённых формул.	41	13		10			18

6. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы о средних значениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора. Разложение произвольной функции. Формы дополнительного члена.	30	9		6			15
7. Исследование функций и построение графиков с помощью производных. Условия постоянства, возрастания и убывания функции. Экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения. Направление вогнутости кривой и точки перегиба. Асимптоты кривой. Исследование функций и построение графиков. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.	38	13		10			15
8. Функции двух переменных. Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных. Производные сложных и неявных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Экстремумы, наибольшее и наименьшее значения. Относительные (условные) экстремумы. Производная по направлению.	40	15		12			13
9. Дифференциал дуги. Декартовы и полярные координаты.	13	5		4			4

10. Комплексные числа. Комплексные функции действительного переменного. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах. Определение и дифференцирование комплексной функции. Показательная функция и формула Эйлера.	18	9		6			3
Всего	*180*	*64*		*48*			*68*
Итого за первый год обучения	*288*	*94*		*78*		*10*	*106*
Третий семестр							
11. Неопределенный интеграл. Первообразная функция. Простейшие правила интегрирования. Интегрирование по частям и путём замены переменной. Интегрирование рациональных выражений. Разложение правильных дробей на простые. Интегрирование некоторых простейших иррациональных выражений. Подстановки Эйлера. Интегрирование тригонометрических функций.	44	12		12			20

12. Определенный интеграл. Определение. Суммы Дарбу. Классы и свойства интегрируемых функций. Свойства определённых интегралов. Свойства, выраженные равенствами и неравенствами. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и метод замены переменной. Интегрирование комплексной функции действительного переменного.	44	12		12			20
13. Бесконечные ряды с постоянными членами. Определение ряда и его суммы. Основные теоремы. Условия сходимости. Признаки сравнения, Коши, Даламбера, Раабе. Интегральный признак Коши. Знакочередующиеся ряды. Абсолютная сходимость. Степенные ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Умножение рядов.	44	12		12			20
14. Бесконечные произведения. Основные понятия и теоремы. Связь с рядами.	20	4		4			12
15. Разложение элементарных функций. Ряд Тейлора.	28	5		5		10	8
Всего	*180*	*45*		*45*		*10*	*80*
Четвёртый семестр							

16. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная и неравномерная сходимости. Условия и признаки равномерной сходимости. Функциональные свойства суммы ряда. Непрерывность суммы ряда. Почленный переход к пределу. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов. Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.	33	8		5			20
17. Интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы. Дифференцирование и интегрирование интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница. Определение интегралов с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Главные значения несобственных интегралов.	29	8		5			16
18. Кратные интегралы. Двукратный интеграл. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Тройные интегралы и их вычисление. Элемент объёма в криволинейных координатах. Цилиндрические и сферические координаты.	31	8		5			18
19. Поверхностные интегралы. Площадь поверхности. Интегралы по поверхности и формула Остроградского. Интегралы по определённой стороне поверхности.	31	8		5			18

20. Криволинейные интегралы. Определение криволинейного интеграла первого и второго рода Площадь и криволинейный интеграл. Формула Грина. Формула Стокса. Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости.	27	8		6			13
21. Ряды Фурье. Ортогональность тригонометрических функций. Теорема Дирихле. Разложение в промежутке $[-\pi,\pi]$. Разложение в промежутке $[0,\pi]$. Периодические функции периода $2l$.	29	8		6			15
Всего	*180*	*48*		*32*			*100*
Итого за второй год обучения	*360*	*93*		*77*		*10*	*180*
ИТОГО за весь период обучения	*648*	*187*		*155*		*20*	*286*

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Введение	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
2. Важнейшие классы функций	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
3. Теория пределов	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
4. Непрерывность функции одной переменной	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
5. Дифференцирование функции одной переменной	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
6. Основные теоремы дифференциального ис-	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала

числения		2. Решение задач
7. Исследование функций и построение графиков с помощью производных	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач 3. Выполнение РГР
8. Функции двух переменных	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
9. Дифференциал дуги	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
10. Комплексные числа. Комплексные функции действительного переменного	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
11. Неопределенный интеграл	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
12. Определенный интеграл	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
13. Бесконечные ряды с постоянными членами	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
14. Бесконечные произведения	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
15. Разложение элементарных функций. Ряд Тейлора	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач 3. Выполнение курсовой работы
16. Функциональные последовательности и ряды	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
17. Интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
18. Кратные интегралы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
19. Поверхностные интегралы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
20. Криволинейные интегралы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
21. Ряды Фурье	Лекции, практические за-	1. Изложение теоретиче-

	нятия	ского материала 2. Решение задач

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Для проведения текущей и промежуточной аттестации:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК–1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических наук.

Примеры типовых контрольных письменных заданий и их оценки.

1. Применяя формулу Грина преобразовать криволинейный интеграл $\int\limits_C y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy+\sqrt{x^2+y^2}dx$, где контур C ограничивает конечную область S.

Всё сделано правильно – 4 балла.

- Правильно записана и применена формула Грина – 3 балла.

- Имеются неточности при формулировке окончательного вывода – минус 1-3 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

2. Найти первообразную функцию $z(x,y)$, если $dz=\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$.

Всё сделано правильно – 3 балла.

- Имеются неточности при отыскании первообразной – минус 1-2 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

3. Учитывая, что для достаточно малых значений x имеет место равенство $\sqrt{1+x}-1=\frac{x}{2}+o(x)$, выделить из бесконечно малой $o(x)$ главный член.

Всё сделано правильно – 4 балла.

- Правильно выписано отношение, предел которого надо найти – 1 балл.

- Правильно найден предел – 2 балла.

- Имеются неточности при выделении главного члена – минус 1-3 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

ОПК-1.2. Использует базовые знания в области математических наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности.

Примеры типовых контрольных письменных заданий и их оценки.

1. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь, ограниченную лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ и внешней частью окружности $x^2+y^2=a^2$.

Всё сделано правильно – 5 баллов.
- Правильно записаны уравнения кривых в полярных координатах – 1 балл.
- Правильно изображена область интегрирования – 1 балл.
- Правильно записан повторный интеграл – 2 балла.
- Имеются неточности при нахождении площади – минус 1-4 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

2. Найти массу $m=\iint\limits_S \rho dS$ поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $\left(z\geq 0\right)$, плотность ρ которой в каждой её точке $M\left(x,y,z\right)$ равна $\dfrac{z}{a}$

Всё сделано правильно – 5 баллов.
- Правильно указана связь между элементами площади в декартовых и сферических координатах – 2 балла.
- Правильно осуществлён переход к сферической системе координат – 2 балла.
- Имеются неточности при нахождении массы – минус 1-4 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

3. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь области, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$ $\left(0\leq t\leq 2\pi\right)$. Например, можно воспользоваться формулой $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_l x\,dy-y\,dx$.

Всё сделано правильно – 4 балла.
- Правильно совершен переход к определённому интегралу – 3 балла.
- В зависимости от допущенных неточностей минус – 1-3 балла.
- Ничего не сделано – 0 баллов.

ОПК-1.3. Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических наук к решению задач профессиональной деятельности.

Примеры типовых контрольных письменных заданий и их оценки.

1. Найти площадь части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащую над плоскостью Oxy и отсечённую плоскостью $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно найдена проекция искомой фигуры на плоскость Oxy – 2 балла.

- Правильно записан повторный интеграл в полярной системе координат – 2 балла.

- Имеются неточности при нахождении площади поверхности – минус 1-4 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью (параметры предполагаются положительными) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (z > 0)$.

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно осуществлён переход к повторному интегралу – 2 балла.

- Правильно вычислен каждый из внутренних интегралов – 3 балла.

- В зависимости от допущенных неточностей минус – 1-3 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

3. Вычислить тройной интеграл

$\iiint\limits_V xy^2 z^3 dxdydz$, где граница области V задана уравнениями

$z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ z = 0$.

Всё сделано правильно – 5 баллов.

- Правильно определена область интегрирования – 1 балл.

- Правильно осуществлён переход к повторному интегралу – 2 балла.

- Правильно вычислен каждый из внутренних интегралов – 2 балла.

- В зависимости от допущенных неточностей минус – 1-3 балла.

- Ничего не сделано – 0 баллов.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. Боронина, Е. Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е. Б. Боронина. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Научная книга, 2019. — 159 c. — 978-5-9758-1745-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/81022.html

2. Гурьянова, К.Н. Математический анализ: учебное пособие / К.Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. - 332 с. - ISBN 978-5-7996-1340-2; То же

[Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.iprbookshop.ru/66542.html
3. Математический анализ: учебное пособие [Электронный ресурс]/ В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-005488-9 Режим доступа: https://znanium.com/catalog/document?id=419610

б) дополнительная литература:
1. Кутузов, А.С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А.С. Кутузов. - 2-е изд. стер. - М.; Берлин: Директ-Медиа, 2017. - 127 с. - ISBN 978-5-4475-2976-5; То же [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166
2. Никольский, С.М. Курс математического анализа: учебник / С.М. Никольский. - 6-е изд., стереотип. - М.: Физматлит, 2001. - 592 с. - ISBN 978-5-9221-0160-8; То же [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69500

Замечание. *Можно воспользоваться любым стереотипным изданием учебников, указанных авторов, независимо от года издания.*

2) Программное обеспечение

Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 4в (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	
AutoNom Standard	бесплатно
Cadence SPB/OrCAD 16.6	Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009
Deductor Academic	бесплатно
HyperChem	Акт предоставления прав № Tr008313 от 20.02.2016
ISIS Draw 2.4 Standalone	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
KTC Net 3.01	бесплатно
Lazarus 1.4.0	бесплатно
Mathcad 15 M010	Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011
MATLAB R2012b	Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно
Microsoft Web Deploy 3.5	бесплатно
MiKTeX 2.9	бесплатно
MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK	бесплатно
NetBeans IDE 8.0.2	бесплатно

Notepad++	бесплатно
Oracle VM VirtualBox 5.0.14	бесплатно
Origin 8.1 Sr2	договор №13918/M41 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»
Python 3.4.3	бесплатно
Python 3.6.0 (Anaconda3 4.3.0 64-bit)	бесплатно
WCF RIA Services V1.0 SP2	бесплатно
WinDjView 2.1	бесплатно

Пакет символьной математики Maple.

Сайт ТвГУ: http://homepages.tversu.ru/~s000154/MAPLE/maple.html

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com;
2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн»https://biblioclub.ru/;
3. ЭБС «Лань» http://e.lanbook.com.

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (http://moodle.tversu.ru)

Научная библиотека ТвГУ (http://library.tversu.ru)

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Важной составляющей данного раздела РПД являются требования к рейтинг-контролю с указанием баллов, распределенных между модулями и видами работы обучающихся.

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60 баллов (30 баллов - 1-й модуль и 30 баллов - 2-й модуль).

Обучающемуся, набравшему 40–54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55–57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58–60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично». В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен.

Распределение баллов по модулям устанавливается преподавателем и может корректироваться.

Методические указания представлены в виде содержательного разбора решения типовых задач, возникающих при освоении дисциплины. Самостоятельная работа заключается в освоении теоретического материала лекций и решения задач по темам рабочей программы.

Первый семестр

Задачи для самостоятельного решения

(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

Доказать, что $\lim a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$)

1. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2};$ 2. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4;$

3. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \dfrac{3}{2};$ **4.** $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2;$

5. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5};$ **6.** $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$

Вычислить предел числовой последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}.$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right).$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right).$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right].$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right].$

Вычислить предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}.$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x-1}{tg\pi x}.$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{3x}-2^{3x}}{arctg 2x-7x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-tgx}$. 5. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$. 6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Определить значения следующих выражений

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\cos bx)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{thx}-\dfrac{1}{tgx}\right)$. 3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. 6. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{tg\,x}{tg\,a}\right)^{ctg(x-a)}$.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

<u>1-я контрольная точка</u>. Темы № **1-2.** По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

<u>2-я контрольная точка</u>. Темы № **2-4.** По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

Экзамен 40 баллов.

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

Вопросы для подготовки к экзамену

Определение иррационального числа. Основная теорема (Дедекинда).

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$), если $a_n=\dfrac{1-2n^2}{2+6n^2}$, $a=-\dfrac{1}{3}$.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a$ $(a>0)$. Указание. Ввести новую переменную $y=a^{\frac{1}{n}}-1$ и учесть, что $y\to 0$ при $n\to\infty$. Воспользоваться тем, что $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, т. е. вторым замечательным пределом.

Границы числовых множеств.

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+5}}{1+2+3+\ldots+(2n-1)}$. Учесть, что сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}n$.

Пусть $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>0)$. Показать, что $f(x+y)+f(x-y)$ = $2f(x)f(y)$. Определение понятия функции. Важнейшие классы функций.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$. Указание. Например, ввести новую переменную $t=x-10$ и учесть, что $t\to 0$ при $x\to 10$.

Показать, что всякую функцию $f(x)$, определённую в симметричном интервале $(-l,l)$, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

Числовая последовательность. Определение предела последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$. Учесть, что $a^x=e^{x\ln a}$ и асимптотические разложения $e^{\alpha}=1+\alpha+O(\alpha^2)$, $\sin\alpha=\alpha+O(\alpha^3)$ при достаточно малых α, т. е. при $\alpha\to 0$.

Найти значение выражения $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$. Указание. Представить дробь $\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ в виде $\dfrac{(x^{100}-x)-(x-1)}{(x^{50}-x)-(x-1)}$ и разделить числитель и знаменатель дроби на $(x-1)$.

Определение предела функции (два). Односторонние пределы.

Доказать неравенство $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k$, если $0\le x_k\le\pi$ для любого k. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

Найти сумму всех биномиальных коэффициентов $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$ = $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k$, где $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ – число сочетаний из n элементов по k элементов. Указание. Воспользоваться формулой Ньютона $(a+b)^n$ = $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$.

Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}$ = -6.

Предельный переход в равенстве и неравенстве. Леммы о бесконечно малых.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$. Указание. Умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое числителю. Воспользоваться, например, тем, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых каждую из них можно заменить любой эквивалентной ей бесконечно малой

Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$), если $f(x)=5x^2+5$, $x_0=8$.

Неопределённые выражения.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{tg\,\pi x}$. Указание. Например, ввести новую переменную $t=x-3$ и учесть, что $t\to 0$ при $x\to 3$.

Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$), если $f(x)=4x^2+6$, $x_0=7$.

Предел монотонной функции.

Является ли равномерно непрерывной функция $f(x)=x^2$ на интервале $(-l,l)$, где l – любое, сколь угодно большое число?

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$. Указание. Выделить в числителе и знаменателе сомножитель $(x+1)$.

Число e.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливо равенство: $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$. Учесть, что $shx \sim x$, $\sin x \sim x$, для достаточно малых значений x.

Частичные последовательности. Лемма Больцано - Вейерштрасса.

Определить область существования функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$. Указание. Воспользоваться вторым замечательным пределом. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Условие существования конечного предела.

Пусть $x\to+\infty$ и $n>0$. Показать, что $C\cdot O(x^n)=O(x^n)$, $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n>m)$, $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$. Указание. Выделить в числителе и знаменателе сомножитель $(x-1)$.

Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Выделение главной части.

Учитывая, что $\sqrt{1+x}-1=\dfrac{1}{2}x+O(x^2)$ выделить главную часть из бесконечно малой $O(x^2)$. Показать, что $\sqrt{1+x}-1$ можно представить в виде $\dfrac{1}{2}x+Ax^2+O(x^3)$, т. е. найти, чему равно A.

Определение непрерывности в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Примеры.

Исследовать на непрерывность и построить график функции $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x>0)$. Указание. Рассмотреть случаи $0<x<1$, $x=1$ и $x>1$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$. Указание. Ввести новую переменную $t=x-\pi$ и учесть, что $t\to 0$ при $x\to\pi$.

Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов. Примеры.

Функция $f(x)=\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ теряет смысл при $x=0$. Определить число $f(0)$, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x=0$.

Непрерывность и разрывы монотонной функции. Суперпозиция непрерывных функций.

Пусть $x\to+\infty$ и $n>0$. Доказать, что $2x^3-3x^2+1=O(x^3)$, $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{arctg\, x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$. Учесть, например, что $1-\cos x$ = $2\sin^2\dfrac{x}{2}$, $\sin x$ = $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

Свойства непрерывных функций. Первая и вторая теоремы Больцано – Коши.
1) Если $f(a)<0$, $f(b)>0$; 2) если $f(a)=A$, $f(b)=B$ и $A\neq B$ то, что из этого следует и каким свойствам должна удовлетворять функция $f(x)$.

Найти предел $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$. Учесть, что при $a>0$ и $b>0$ $\lg a+\lg b$ = $\lg ab$, $\lg a-\lg b$ = $\lg\dfrac{a}{b}$, и формулу сокращённого умножения $(x-h)(x+h)$ = x^2-h^2, т. е. что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$ = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\lg\left(\dfrac{x^2-h^2}{x^2}\right)}{h^2}$.

Доказать, что функция $y=x^3$ равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема об ограниченности функции (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ …, то она ограничена.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n=1+\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$. Указание. Показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует число N = $N(\varepsilon)$, такое, что неравенство $|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$ выполняется для всех $n>N$ и любого натурального числа p.

Доказать эквивалентность бесконечно малых: $tgx-\sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$. Указание. Найти, чему равен предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\dfrac{1}{2}x^3}$.

Найти предел $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$. Указание. Например, умножить числитель и знаменатель на выражения, сопряженные знаменателю и числителю соответственно и воспользоваться, например, тем, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых каждую из них можно заменить любой эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказать, что $a^x-1 \sim x\ln a$ $(a>0)$ для достаточно малых значений x. Указание. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}$ = 1. Воспользоваться новой переменной $y=a^x-1$, учитывая, что $y\to 0$ при $x\to 0$.

Понятие о равномерной непрерывности.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$. Например, воспользоваться одной из формул сокращённого умножения и первым замечательным пределом.

Доказать, что функция $y=x^3$ равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема Кантора.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$. Учесть, что $shx \sim x$, $\sin x \sim x$, для достаточно малых значений x.

Доказать, что функция $f(x)=\sin x$ непрерывна при любом значении $x=x_0$.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$. Указание. Для начала умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю.

Для функции $y=f(x)$ = $sh\,x$ = $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ найти обратную функцию $x=g(y)$, т. е. найти x из уравнения y = $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Непрерывность элементарных функций.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$. Указание. Использовать новую переменную $t=x-1$ и учесть, что $t\to 0$ при $x\to 1$.

Является ли равномерно непрерывной функция $f(x)=x^3$ на интервале $(-l,l)$, где l – любое, сколь угодно большое число?

Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$), если $f(x)=-5x^2-8$, а $x_0=2$.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$. Указание. «Вынести» e^x за знак радикала и воспользоваться тем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ = e.

Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$), если $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+6n^2}$ и $a = -\dfrac{1}{3}$.

Решение. По определению предела для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ должен существовать такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ должно выполняться неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Заметим, что если речь идёт об установлении факта стремления последовательности a_n к пределу a, то совсем не обязательно указывать наименьшее значение N, для которого выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Важен сам факт существования такого номера N.

Рассмотрим разность $|a_n - a|$ = $\left|\dfrac{1-2n^2}{2+6n^2} + \dfrac{1}{3}\right|$ = $\left|\dfrac{3-6n^2+2+6n^2}{3(2+6n^2)}\right|$ = $\dfrac{5}{6(1+3n^2)}$ < $\dfrac{6}{6(1+3n^2)}$ = $\dfrac{1}{1+3n^2}$ < $\dfrac{1}{3n^2}$ < ε. Следовательно, должно выполняться неравенство $n^2 > \dfrac{1}{3\varepsilon}$, т. е. за N можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$. Тем самым утверждение доказано.

Следует заметить, что N можно было бы найти и из неравенства $\dfrac{5}{6(1+3n^2)} < \varepsilon$. Но вовсе не обязательно находить наименьшее возможное значение N. Важно, что такой номер в принципе существует.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1} - \dfrac{4n+1}{2}\right]$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+5}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Решение. Напомним, что сумма конечного числа членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число слагаемых, т. е. сумма первых n членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

а) Числитель первой дроби является суммой n членов арифметической прогрессии с членами 1, 5, 9, 13, …, $4n-3$, поэтому с учётом указанной формулы $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1} - \dfrac{4n+1}{2}\right]$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n-1)n}{n+1} - \dfrac{4n+1}{2}\right]$ =

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n-4n^2-4n-n-1}{2(n+1)} = -\lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{2(n+1)} = -\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(7+\frac{1}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = -\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = -\frac{7}{2}.$$

б) Учитывая, что знаменатель дроби является суммой n членов арифметической прогрессии $1,3,\ldots,2n-1$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+5}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$ =

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}}-n^2\sqrt{3+\frac{5}{n^4}}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}}-\sqrt{3+\frac{5}{n^4}}\right) = -\sqrt{3}.$$

в) Символ $n!$ означает произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Следует заметить, например, что $n!=n(n-1)!$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!\frac{3n}{3n}+(3n)!(3n+1)}{(3n)!(n-1)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!\frac{1}{3n}+(3n)!(3n+1)}{(3n)!(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!\left(\frac{1}{3n}+3n+1\right)}{(3n)!(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^2}+3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 3.$$

г) Выражение $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$, предел которого надо найти, можно переписать в виде $2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}\cdots2^{\frac{1}{2^n}}$. Как известно из элементарной математики, при умножении чисел с одинаковыми основаниями показатели степени складываются, т. е. $2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}\cdots2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

В данном случае степень числа два есть не что иное, как сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем, равным $\frac{1}{2}$. Так как сумма n членов геометрической прогрессии $b_1,b_2,\ldots,b_n$ со знаменателем q равна S_n = $\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, то $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2^n}$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$.

3. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

Решение. Переходя к половинному углу $\frac{x}{2}$, пользуясь известными формулами элементарной тригонометрии $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{px}{2}+2\sin\frac{px}{2}\cos\frac{px}{2}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{px}{2}\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{px}{2}}{\sin\frac{px}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}}\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{p}.$$

Заметим, что при нахождении предела воспользовались первым замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Следует отметить, что тот же предел можно найти и по-другому, если воспользоваться асимптотическими разложениями, т. е. тем, что для достаточно малых значений α: $\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2!}+O\left(\alpha^4\right)$, $\sin\alpha = \alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+O\left(\alpha^5\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+O\left(x^3\right)-1+O\left(x^2\right)}{1+px+O\left(x^3\right)-1+O\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+O\left(x^2\right)}{px+O\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+O(x)}{p+O(x)}$$

$$= \frac{1}{p}.$$

Было учтено, что $O\left(x^3\right) + O\left(x^2\right) = O\left(x^2\right)$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{O\left(x^3\right)+O\left(x^2\right)}{O\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{C_1x^3+C_2x^2}{C_3x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{C_1}{C_3}x+\frac{C_2}{C_3}\right) = \lim_{x\to 0}\left[O(x)+C\right] = C.$$

Здесь C, C_1, C_2, C_3 – отличные от нуля постоянные.

Если в этом же примере использовать символ «o», то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+o\left(x^2\right)-1+o(x)}{1+px+o\left(x^2\right)-1+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{px+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x)}{x}}{p+\frac{o(x)}{x}} =$$

$\frac{1}{p}$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{x} = 0$.

Было учтено, что $o\left(x^2\right)+o(x) = o(x)$. Действительно, $o\left(x^2\right)+o(x) = \beta_1(x)x^2+\beta_2(x)x = \left[\beta_1(x)x+\beta_2(x)\right]x = \beta(x)x = o(x)$. Здесь $\beta_1(x), \beta_2(x), \beta(x)$ – функции, стремящиеся к нулю при $x\to 0$.

4. Определить области существования (определения) следующих функций:

а) $y = \sqrt{3x-x^3}$; б) $y = \lg\left[\cos(\lg x)\right]$; в) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$;

г) $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x} \quad (0 \le x \le 2\pi)$.

Решение

а) Функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно. Следовательно, должно выполняться неравенство $3x - x^3 \ge 0$ или, что то же самое, $x\left(x^2 - 3\right) \le 0$. Если записать последнее неравенство в виде $x\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \le 0$ и воспользоваться методом интервалов, то сразу найдём, что функция y существует при значениях $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right]$.

б) Функция определена если $x > 0$ и $\cos(\lg x) > 0$. Из последнего неравенства следует, что должно выполняться двойное неравенство $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \lg x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, откуда, потенцируя, найдём $10^{2\pi k - \frac{\pi}{2}} < x < 10^{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$. Было учтено, что $\cos t > 0$, если $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

в) Функция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{2x}{1+x}\right| \le 1$. Это означает, что $-1 \le \frac{2x}{1+x} \le 1$. Таким образом, необходимо найти решение системы двух неравенств $\begin{cases} \frac{2x}{1+x} + 1 \ge 0, \\ \frac{2x}{1+x} - 1 \le 0. \end{cases}$ Она эквивалентна системе $\begin{cases} \frac{3x+1}{1+x} \ge 0, \\ \frac{x-1}{1+x} \le 0. \end{cases}$ Используя метод интервалов из первого неравенства, найдём, что $x < -1$ или $x \ge -\frac{1}{3}$, а из второго неравенства – $-1 < x \le 1$. Следовательно, значения $-\frac{1}{3} \le x \le 1$ удовлетворяют обоим неравенствам.

г) Функция существует, когда оба подкоренных выражения неотрицательны, т. е. $\begin{cases} \sin 2x \ge 0, \\ \sin 3x \ge 0. \end{cases}$ Из первого неравенства системы следует, что $2\pi k \le 2x \le \pi + 2\pi k$ или $\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + \pi k$. Из второго – $2\pi n \le 3x \le \pi + 2\pi n$ или $\frac{2\pi}{3} n \le x \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} n$, где k и n – целые числа.

Заметим, что по условию задачи $0 \le x \le 2\pi$, поэтому k может принимать только значения 0 или 1, а n – 0, 1, 2.

Итак, при $k=0$ и $n=0$ значения независимой переменной x удовлетворяют соответственно неравенствам $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ и $0\le x\le\frac{\pi}{3}$. Одновременно эти два неравенства выполняются при $0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

При остальных значениях k и n промежутки значений x, в которых $\sin 2x\ge 0$ и $\sin 3x\ge 0$ пересекаются только при $k=1$, когда $\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}$ и при $n=2$, когда $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}$. Одновременно эти два неравенства выполняются при $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

Таким образом, функция y определена в промежутке $0\le x\le 2\pi$, если независимая переменная принимает значения $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

Второй семестр

Задачи для самостоятельного решения
(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

Исходя из определения производной, найти $f'(0)$

1. $f(x)=\sqrt{1+\ln(1+x^2\sin\frac{1}{x})^2}-1,\quad x\ne 0;\quad f(0)=0$.

2. $f(x)=\sin(e^{x^2\sin\frac{5}{x}}-1)+x,\quad x\ne 0;\quad f(0)=0.$

3. $f(x)=3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x,\quad x\ne 0;\quad f(0)=0$.

4. $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x},\quad x\ne 0;\quad f(0)=0$.

5. $f(x)=x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x^2}{2},\quad x\ne 0;\quad f(0)=0$.

6. $f(x)=tg(2^{x^2\cos(\frac{1}{8x})}-1+x),\quad x\ne 0;\quad f(0)=0$.

Найти производную

1. $y=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$.

2. $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.

3. $y=\dfrac{\cos(\sin 5)\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.

4. $y=\dfrac{\cos(\ln 7)\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.

5. $y=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\frac{2+\sqrt{5}thx}{2-\sqrt{5}thx}$.

6. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{thx}}{1-\sqrt{thx}}-arctg\sqrt{thx}$.

7. $y=x^{e^{\cos x}}$.

8. $y=x^{e^{\sin x}}$.

Найти производную первого порядка y'_x от функции, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x=\frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin(\frac{t^3}{3}+t). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=tg\sqrt{1+t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=(\arcsin t)^2, \\ y=t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\ln tgt, \\ y=1/\sin^2 t. \end{cases}$

Найти производную второго порядка y''_{x^2} от функции, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\frac{1}{t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\frac{1}{t}, \\ y=\frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\frac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

Построить графики функций с помощью производной первого порядка

1. $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$.

2. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

3. $y=\frac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}$.

4. $y=-\frac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2+2x+9}$.

5. $y=\sqrt[3]{x(x+2)}$.

6. $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$.

Найти наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках

1. $y=x^2+\frac{16}{x}-16,\quad x\in[1,4]$.

2. $y=4-x-\frac{4}{x^2},\quad x\in[1,4]$.

3. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1,\quad x\in[0,6]$.

4. $y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5},\quad x\in[-3,3]$.

5. $y=2\sqrt{x}-x,\quad x\in[0,4]$.

6. $y=x-4\sqrt{x}+5,\quad x\in[1,9]$.

Провести полное исследование функций и построить их графики

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. **2.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **3.** $y=\dfrac{2}{x(x+2)}$.

4. $y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$. **5.** $y=\sqrt[3]{(2+x)(x^2+4x+1)}$. **6.** $y=\sqrt{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}}$.

Исследовать на экстремум функции двух переменных

1. $z=x^2+(y-1)^2$. **2.** $z=x^2-xy+y^2-2x+y$. **3.** $z=x^2y^3(6-x-y)$.

4. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-2y^2$. **5.** $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\quad (a>0,b>0)$.

6. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3arctg\dfrac{y}{x}$.

Найти точки условного экстремума следующих функций

1. $z=xy,\quad$ *если* $x+y=1$. **2.** $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b},\quad$ *если* $x^2+y^2=1$.

3. $z=x^2+y^2,\quad$ *если* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. **4.** $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2,\quad$ *если* $x^2+y^2=1$.

5. $u=xy^2z^3,\quad x+2y+3z=a\quad (x>0,y>0,z>0,a>0)$.

6. $u=xyz,\quad$ *если* $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$.

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ

1. $z=x+\varphi(x,y)$. **2.** $z=x\varphi(\dfrac{x}{y})$. **3.** $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

4. $z=\varphi(x)\cdot\psi(y)$. **5.** $z=x\varphi(\dfrac{x}{y})+y\psi(\dfrac{x}{y})$. **6.** $z=\varphi(xy)+\psi(\dfrac{x}{y})$.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

<u>1-я контрольная точка</u>. Темы № **5 – 7**. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

<u>2-я контрольная точка</u>. Темы № **8 – 10**. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

Экзамен 40 баллов.

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

Вопросы для подготовки к экзамену

Производная и дифференциал первого порядка.
Производные простейших функций.
Производная сложных и обратных функций.
Производные и дифференциалы высших порядков.
Параметрическое дифференцирование.
Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля).
Формулы Лагранжа и Коши.
Формула Тейлора для многочлена и произвольной функции.
Исследование функций с помощью производных.
Экстремум функции, наибольшее и наименьшее значение.
Исследование функций и построение графиков.
Направление вогнутости кривой и точки перегиба.
Асимптоты кривой.
Раскрытие неопределённостей с помощью правила Лопиталя.
Функция двух переменных. Основные понятия.

Частные производные и полный дифференциал функции двух независимых переменных.

Производные сложных и неявных функций.

Производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

Необходимый признак экстремума функции двух независимых переменных. Достаточные условия экстремума.

Производная по направлению. Градиент функции.
Дифференциал дуги.
Комплексные числа и их геометрическая интерпретация.

Имеет ли функция $y = \cos x + ch x$ экстремум при значении $x = 0$? (Исследовать с помощью производных высших порядков).

Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных $z = x^2 + (y-1)^2$.

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Извлечь корень $\sqrt[3]{i}$.

Извлечь корень $\sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}$.

Исследовать на экстремум функцию $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ $(x > 0, y > 0)$.

Найти точки условного экстремума функции $z = x^2 + y^2$, если $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Вводя новую переменную $x = e^t$ преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение: $x^2y''+xy'+y=0$. Учесть, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{x^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\cdot t'_x$ и то, что $t'_x=\frac{1}{x'_t}$.

Показательная функция и формула Эйлера.

Относительные (условные) экстремумы.

Исследовать на экстремум функцию $z = x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ $(x>0, y>0)$.

Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$. Указание. Рассмотреть функцию $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ и учесть, что $f(x_0+dx, y_0+dy) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$.

Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Найти производную функции $y(x)=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$.

Решение. Если в функцию несколько раз входит одно и то же выражение, то есть смысл ввести вспомогательную переменную, равную этому выражению, и дифференцировать исходную функцию как сложную функцию. В этом случае повторяющееся выражение надо будет дифференцировать только один раз.

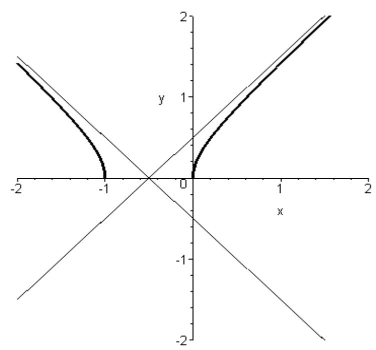
Пусть $t = e^x$, тогда $y'_x = y'_t\cdot t'_x$. С учетом замены исходная функция примет вид $y(t) = \ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)$, следовательно,

$$y'_t = \frac{1}{t} - \frac{1+\frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{(2+t)\sqrt{t^2+t+1}+2(t^2+t+1)-t\sqrt{t^2+t+1}-2t^2-t}{t\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$\frac{2\sqrt{t^2+t+1}+t+2}{t\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{t\sqrt{t^2+t+1}} \text{ и } y'_x = t'_x\cdot y'_t = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$$

2. Найти асимптоты и построить график функции $y=\sqrt{x^2+x}$.

Решение. Функция определена для всех значений x, не принадлежащих интервалу $(-1,0)$. Проверим, имеются ли асимптоты. Угловой коэффициент наклонной асимптоты $Y=ax+b$ определяется как предел отношения $\frac{y}{x}$, т. е. $a = \lim\frac{y}{x}$. В данном случае $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}$. Поэтому $a=1$ при $x\to+\infty$ и



$\tilde{a} = -1$ при $x \to -\infty$. Свободный член b = $\lim\limits_{x\to+\infty}(y - ax)$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \dfrac{1}{2}$, $\tilde{b}$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}(y - \tilde{a}x) =$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-x} = -\dfrac{1}{2}$.

Функция принимает положительные значения во всей области определения, за исключением только точек $x = -1$ и $x = 0$, где она обращается в нуль. Первая производная $y'(x)$ = $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ стремится к минус бесконечности при $x \to -1-0$ и к плюс бесконечности при $x \to +0$. Вторая производная $y''(x)$ = $-\dfrac{1}{4\left(x^2+x\right)^{3/2}} < 0$ для всех значений x, принадлежащих области определения функции, и, следовательно, график функции вогнут вниз.

Таким образом, график исследуемой функции (рисунок) имеет две различные асимптоты при стремлении x к плюс или минус бесконечности, а именно: $Y = x + \dfrac{1}{2}$ при $x \to +\infty$ и $\tilde{Y} = -x - \dfrac{1}{2}$ при $x \to -\infty$.

3. Определить область существования (определения) функции $u(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

Решение. Область существования (или допустимых значений) аналитически заданной функции – это множество тех значений независимой переменной, для которых выражение, задающее функцию, имеет смысл.

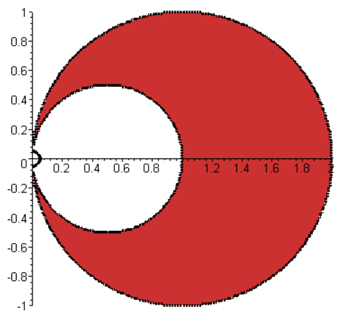
Нетрудно заметить, что в данном случае функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно. Следовательно, имеем две системы неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2-x \ge 0,\\ 2x-x^2-y^2 > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2-x \le 0,\\ 2x-x^2-y^2 < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{4},\\ (x-1)^2 + y^2 < 1,\end{cases}\\ \begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \dfrac{1}{4},\\ (x-1)^2 + y^2 > 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система имеет решение, вторая – нет. Таким образом, областью допустимых значений независимых переменных x и y является множество точек, находящихся между двумя окружностями, центры которых смещены вправо по оси абсцисс на расстояния их радиусов, равных $\dfrac{1}{2}$ и 1 соответственно. Граница меньшей из окружно-



стей входит в область определения функции, а большей – нет. Следует также исключить начало координат.

4. Найти производную функции $u=(tgt)^{\sin t}$.

Решение. Положим $x=tgt$, $y=\sin t$. Тогда $u=x^y$ и по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. А так как $\frac{\partial u}{\partial x}=x^y\frac{y}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$, то $\frac{du}{dt}=(tgt)^{\sin t}\left(\frac{1}{\cos t}+\cos t\cdot\ln tgt\right)$.

5. Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

а) $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, если $u=\ln x$ и $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$;

б) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, если $u=\frac{y}{x}$ и $v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Пусть $z(x,y)$ = $\tilde z(u,v)$. По правилу дифференцирования сложных функций имеем $\frac{\partial z}{\partial x}$ = $\frac{\partial\tilde z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ + $\frac{\partial\tilde z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ = $\frac{\partial\tilde z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$ + $\frac{\partial\tilde z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$.

а) С учетом того, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ = $\frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ = 0, $\frac{\partial v}{\partial x}$ = 0, $\frac{\partial v}{\partial y}$ = $\frac{1+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{y+\sqrt{1+y^2}}$ = $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ = $\frac{1}{x}\frac{\partial\tilde z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ = $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial\tilde z}{\partial v}$. Подставляя найденные производные в уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}$ = xy, получим $\frac{\partial\tilde z}{\partial u}+\frac{\partial\tilde z}{\partial v}$ = $e^u shv$. Было учтено, что $x=e^u$, а $y+\sqrt{1+y^2}=e^v$, откуда y = $\frac{e^{2v}-1}{2e^v}$ = $\frac{e^v-e^{-v}}{2}$ = shv.

б) Введём обозначение $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Так как $\frac{\partial u}{\partial y}$ = $\frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ = $-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ = $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{x+z\frac{\partial z}{\partial x}}{r}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ = $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y+z\frac{\partial z}{\partial y}}{r}$, то $\frac{\partial z}{\partial x}$ = $-\frac{y}{x^2}\frac{\partial\tilde z}{\partial u}$ + $\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{x+z\frac{\partial z}{\partial x}}{r}\right)\frac{\partial\tilde z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial\tilde z}{\partial u}$ + $\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y+z\frac{\partial z}{\partial y}}{r}\right)\frac{\partial\tilde z}{\partial v}$. Отсюда уже легко найти $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}\frac{\partial\tilde z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial\tilde z}{\partial v}}{1-\frac{v}{r}\frac{\partial\tilde z}{\partial v}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial \tilde z}{\partial u} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial \tilde z}{\partial v}}{1 - \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial \tilde z}{\partial v}}$. Подставляя найденные значения для частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в исходное уравнение $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, получим $\dfrac{x^2+y^2}{r}\dfrac{\partial \tilde z}{\partial v} = v - \dfrac{v^2}{r}\dfrac{\partial \tilde z}{\partial v}$ или $\dfrac{x^2+y^2+v^2}{r}\dfrac{\partial \tilde z}{\partial v} = v$. И так как $x^2+y^2 = (v-z)^2 - z^2$, то $x^2+y^2+v^2 = 2v(v-z) = 2vr$, следовательно, $\dfrac{\partial \tilde z}{\partial v} = \dfrac{1}{2}$.

6. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и f – дважды дифференцируемая функция. Показать, что

$$\Delta u = F(r),$$

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, и найти функцию F.

Решение. Понятно, что для ответа на поставленный вопрос необходимо найти частные производные второго порядка функции u по независимым переменным x, y и z. Для более краткого изложения воспользуемся обозначениями. А именно, при значениях индекса $i = 1, 2, 3$ под символом x_i будем подразумевать: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r)\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + f'(r)\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$.

Поскольку $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}$, то $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \dfrac{r - x_i\dfrac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} = \dfrac{r - \dfrac{x_i^2}{r}}{r^2} = \dfrac{r^2 - x_i^2}{r^3}$.

Итак, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r)\dfrac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\dfrac{r^2 - x_i^2}{r^3}$. Следовательно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + f'(r)\frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = f''(r) + f'(r)\frac{2}{r}.$$

Таким образом, действительно $\Delta u = F(r)$, а $F(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$.

7. Дана функция $u = xyz$. Найти её производную в точке $M_0(5,1,2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M(7,-1,3)$.

Решение. Производная функции $u(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению $l(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ определяется по формуле

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma$. Так как $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=10$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5$. Проекции вектора $\overrightarrow{M_0M}$ соответственно равны $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$, то есть $2,-2,1$. Направляющими косинусами будут $\cos\alpha=\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=-\frac{11}{3}$. Знак минус указывает на то, что в данном направлении функция убывает.

8. Показать, что функция $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ (a и b – постоянные) удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Решение. Прежде чем найти производные u'_t и u''_{x^2}, входящие в исходное уравнение, для краткости дальнейших выкладок введём обозначения: $\alpha = 2a\sqrt{\pi}$, $\beta = 4a^2$, тогда $u=\frac{1}{\alpha\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$. Так как частная производная по времени $\frac{\partial u}{\partial t}=\left[-\frac{1}{2\alpha t\sqrt{t}}+\frac{(x-b)^2}{\alpha\beta t^2\sqrt{t}}\right]e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$, а частные производные по пространственной координате $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2(x-b)}{\alpha\beta t\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[-\frac{2}{\alpha\beta t\sqrt{t}}+\frac{4(x-b)^2}{\alpha\beta^2t^2\sqrt{t}}\right]e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$, то, подставляя найденные выражения для производных в исходное уравнение и сокращая на сомножитель $e^{-\frac{(x-b)^2}{\beta t}}$, найдём $-\frac{1}{2\alpha t\sqrt{t}}+\frac{(x-b)^2}{\alpha\beta t^2\sqrt{t}}=-\frac{2a^2}{\alpha\beta t\sqrt{t}}+\frac{4a^2(x-b)^2}{\alpha\beta^2t^2\sqrt{t}}$. С учётом того, что $\alpha = 2a\sqrt{\pi}$, а $\beta = 4a^2$, пропуская элементарные промежуточные выкладки, получим $-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t}}+\frac{(x-b)^2}{8a^3\sqrt{\pi}\,t^2\sqrt{t}}=-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t}}+\frac{(x-b)^2}{8a^3\sqrt{\pi}\,t^2\sqrt{t}}$. Тем самым исходное предположение доказано.

Третий семестр

Задачи для самостоятельного решения

(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

Найти неопределенные интегралы

1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$. 2. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$. 3. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$.

4. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$. 5. $\int sh ax \sin bx\, dx$. 6. $\int x f''(x)\,dx$.

Вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$. 2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. 3. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. 5. $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. 6. $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x\, dx}{\sqrt{x}}$.

Исследовать сходимость рядов

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{n}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$.

Найти $F'(\alpha)$, если

1. $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$. 2. $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x}dx$. 3. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$.

4. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)dx$. 5. $F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2}dx$.

7. Пользуясь основными разложениями, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

e^{-x^2}, $\cos^2 x$, $\frac{x^{10}}{1-x}$, $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

1-я контрольная точка. Темы № **11,12.** По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

2-я контрольная точка. Темы № **13,15.** По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

Экзамен 40 баллов.

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

Вопросы для подготовки к экзамену

Первообразная функция. Таблица основных интегралов.

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$. Указание. Выделить из неправильной рациональной дроби $\frac{x^3+1}{x^2-x}$ целую часть.

Интегрирование путем замены переменной.

Интегрирование по частям.

Разложение правильных дробей на простые дроби.

Определение ряда и его суммы. Основные теоремы.

Найти $F''(x)$, если $F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)dy$.

Найти сумму ряда $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{2}{n^2-14n+48}$. Указание. Рассмотреть частичную сумму ряда $S_k = \sum_{n=9}^{k}\frac{2}{n^2-14n+48}$ и найти $\lim_{k\to\infty} S_k$, который и равен сумме ряда.

Подстановки Эйлера.

Условие сходимости положительного ряда.

Вычислить $\int_{a^2}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. Например, воспользоваться подстановкой $t=\sqrt{x^2+1}$.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+2}{n^3+1}$. Учесть, что $\ln(1+x) = O(x)$ для достаточно малых значений x и один из признаков сравнения сходимости рядов.

Определенный интеграл.

Суммы Дарбу.

Условия существования интегралов.

Теоремы сравнения рядов.

Доказать неравенство $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция для $x \in [a,b]$. Указание. Рассмотреть $\int_a^b dx\int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$.

Вычислить определенный интеграл $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$. Указание. Использовать метод интегрирования по частям и учесть, что $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Свойства определенных интегралов, выражаемые равенствами и неравенствами.

Признаки Коши и Даламбера сходимости рядов с постоянными членами.

Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$.

Интегрирование по частям и правило замены переменной в определенном интеграле.

Умножение степенных рядов.

Найти определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{2+\cos x}$. Указание. Либо воспользоваться универсальной подстановкой $t = tg\frac{x}{2}$. Или учесть, что $\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, а $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$.

Найти произведение $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ и записать результат в виде степенного ряда.

Интеграл с переменным верхним пределом.

Формула Ньютона-Лейбница.

Общее условие сходимости произвольного ряда.

Абсолютная сходимость.

Найти: $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$, $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$, $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx$.

Бесконечные произведения. Основные теоремы. Связь с рядами.

Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов.

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$, используя признак Абеля.

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$. Указание. Из неправильной рациональной дроби $\frac{3x^3+1}{x^2-1}$ выделить целую часть.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда $1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$ $(|x|<1)$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда $x+2x^2+3x^3+\ldots$ $(|x|<1)$.

Вычислить $F'(x)$, если $F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$.

Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Путем надлежащего преобразования подынтегрального выражения найти интеграл $\int\frac{xdx}{4+x^4}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражения к виду, в котором подстановка очевидна и её можно выполнить «мысленно»

$$\int\frac{xdx}{4+x^4}=\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d\,\frac{x^2}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}arctg\frac{x^2}{2}+C.$$

2. Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

а) $\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; б) $\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$; в) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$; д) $\int\frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

е) $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx$.

Решение. Метод подстановки (метод замены переменной) заключается в следующем. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна, то полагают $x=\varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$. Тогда $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ употребляют обратную подстановку $t=\psi(x)$, учитывая, что $dt=\psi'(x)dx$.

Условимся, что при решении некоторых задач в квадратных скобках будут приводиться промежуточные выкладки, не требующие особых комментариев. И если такая скобка стоит после или перед знаком равенства, то она отношения к нему не имеет.

а) $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left[x = \sin t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ dx = \cos t\,dt,\ 1-x^2 = \cos^2 t\right] = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t}$ $= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tg\,t + C = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$. Перед квадратным корнем выбран знак «$+$», т. к. $\cos t > 0$ для указанных значений переменной t.

б) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \left[t = \cos^2 x,\ dt = -2\cos x\sin x\,dx\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{1+t} = -\frac{1}{2}\int \frac{1+t-1}{1+t}dt = -\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln(1+t) + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C$.

в) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = \left[t = \sqrt{2-x},\ dt = -\frac{dx}{2\sqrt{2-x}},\ \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -2dt,\ x = 2-t^2\right] = -2\int\left(2-t^2\right)^2 dt = -2\int\left(4-4t^2+t^4\right)dt = -2\left(4t-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right) + C = -\frac{2\sqrt{2-x}}{15}\cdot \cdot\left(3x^2+8x+32\right) + C$.

г) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \left[t = tg^3 x,\ dt = 3tg^2 x\frac{dx}{\cos^2 x} = 3\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx,\ \frac{1}{3}\frac{dt}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x},\ \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x+1 = t^{\frac{2}{3}}+1\right] = \frac{1}{3}\int\left(t^{\frac{2}{3}}+1\right)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+t\right) + C = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x + C$.

Заметим, что и другую подстановку можно увидеть, если сначала преобразовать подынтегральное выражение, с учётом того, что $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ и $d\,tgx = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Действительно, $\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{d\,tgx}{\cos^2 x} = = tg^2 x\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}d\,tgx$ $= tg^2 x\left(tg^2 x+1\right)d\,tgx$, поэтому можно взять $t = tg\,x$. Тогда $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int t^2\left(t^2+1\right)dt = \int\left(t^4+t^2\right)dt = \frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x + + C$.

д) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[t = \sqrt{1+\ln x},\ dt = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\frac{dx}{x},\ \ln x = t^2-1\right] = 2\int\left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{3}t^3-2t + C = \frac{2}{3}t\left(t^2-3\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+\ln x}\left(\ln x-2\right) + C$.

Если воспользоваться подстановкой $t = \ln x$, то $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{1+t}} =$ $\int \frac{t+1-1}{\sqrt{1+t}} dt = \int \sqrt{t+1} dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t+1}} = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2(t+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t+1}(t-2) + C$ $= \frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{\ln x + 1} + C$.

Заметим, что эта постановка очевидна, если искомый интеграл переписать в виде $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{\ln x \, d\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}$.

е) Воспользуемся подстановкой $t = 1-5x^2$, тогда $dt = -10x\,dx$ и, следовательно, $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10} dx = -\frac{1}{10}\int \frac{1-t}{5} t^{10} dt = -\frac{1}{50}\int t^{10} dt + \frac{1}{50}\int t^{11} dt = -\frac{1}{11\cdot 50} t^{11} +$ $\frac{1}{12\cdot 50} t^{12} = -\frac{t^{11}}{50}\left(\frac{1}{11} - \frac{t}{12}\right) = -\frac{t^{11}(12-11t)}{6600} = -\frac{\left(1-5x^2\right)^{11}}{6600}\left(1+55x^2\right) + C$.

3. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

а) $\int x^n \ln x\, dx$; б) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$; в) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$; г) $\int \sin x \cdot \ln(tg\, x) dx$.

Решение. Метод интегрирования по частям заключается в том, что если u и v – некоторые дифференцируемые функции, зависящие от переменной x, то $\int u dv = uv - \int v du$.

а) $\int x^n \ln x\, dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x\, dx^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^{n+1}\frac{dx}{x}\right) =$ $= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$, при $n \neq -1$.

При $n = -1$ имеем $\int \frac{\ln x\, dx}{x} = \int \ln x\, d\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

б) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2\int x\,\frac{\ln x}{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln^2 x}{x} - 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx +$ $2\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$. В правой части равенства получили такой же интеграл, что и в левой, поэтому $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx - \frac{\ln^2 x}{x}$, но $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int \ln x\, d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ $+ \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$, и окончательно найдем

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} + C = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

в) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\,de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx$ $+ \frac{b}{a^2}\int \sin bx\,de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Как и в предыдущем примере, справа получили тот же интеграл, что и слева. Перенося его в левую часть и приводя подобные члены, найдем, что $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$.

г) $\int \sin x\cdot\ln(tg\,x)dx = -\int \ln(tg\,x)\,d\cos x = -\cos x\cdot\ln(tg\,x) + \int \cos x\frac{1}{tg\,x}\frac{1}{\cos^2 x}dx =$ $-\cos x\cdot\ln(tg\,x) + \int\frac{dx}{\sin x} = -\cos x\cdot\ln(tg\,x) + \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\cos x\cdot\ln(tg\,x) +$ $\int\frac{d\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = -\cos x\cdot\ln(tg\,x) + \int\frac{d\,tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}} = -\cos x\cdot\ln(tg\,x) + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

Таким образом, $\int \sin x\cdot\ln(tg\,x)dx = -\cos x\cdot\ln(tg\,x) + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

4. Применяя подходящую замену переменной, найти следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$; в) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

Решение. Иногда подстановка очевидна.

а) Сделаем подстановку $x = a\sin t$, считая, что $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда dx = $a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$ и $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt =$ $\frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi a^4}{16}$.

б) Подстановка $t = \arcsin\sqrt{x}$ сразу приводит к требуемому результату, т. к. $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$, и, следовательно, $\int\limits_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt =$ $t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$.

в) Нетрудно увидеть, что применима подстановка $t=\sqrt{e^x-1}$, поскольку $dt = \dfrac{e^x dx}{2\sqrt{e^x-1}}$, а $\sqrt{e^x-1}\,dx = \dfrac{2t^2dt}{t^2+1} = 2\dfrac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\left(1-\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt$, и, следовательно, искомый интеграл приводится к легко берущемуся интегралу, а именно $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx = 2\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt = 2-2arctgt\Big|_0^1 = 2-\dfrac{\pi}{2}$.

5. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\sin n}{n(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

Решение. Из имеющихся признаков сходимости знакопостоянных рядов довольно часто оказывается эффективным признак сравнения: если общий член ряда $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$, то при $p>1$ ряд сходится, а при $p\le 1$ расходится.

а) Общий член ряда $a_n = \dfrac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. С учетом признака сравнения заключаем, что данный ряд сходится.

б) Общий член ряда $a_n = \dfrac{1+\sin n}{n(n+2)} \le \dfrac{2}{n(n+2)} < \dfrac{2}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Согласно признаку сравнения исследуемый ряд сходится.

в) Общий член ряда $a_n = \ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4} = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+4}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, т. к. $\ln(1+\alpha)=\alpha+O(\alpha^2)$ при $\alpha\to 0$. Следовательно, ряд сходится.

г) Общий член ряда $a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 = n\left(1+\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)^2 = n\left(\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)^2 = n\left(\dfrac{1}{n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = \dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. С учётом признака сравнения нетрудно заметить, что ряд расходится. Было учтено, что $e^{\alpha} = 1+\alpha+O(\alpha^2)$ при достаточно малых α $(\alpha\to 0)$.

К этому же выводу можно прийти и по-другому. Найдём предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n : \dfrac{1}{n}\right)$ и убедимся в том, что он конечен и не равен нулю, а это и будет означать, что $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^2$. Воспользуемся новой переменной $t = e^{\frac{1}{n}}-1$, которая стремится к нулю при $n\to\infty$. Так как $e^{\frac{1}{n}} = 1+t$, то $\frac{1}{n} = \ln(1+t)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\right]^2 = \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right]^2 = 1$, с учётом второго замечательного предела $\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e\right)$.

6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=9}^{\infty}\frac{2}{n^2-14n+48}$.

Решение. Рассмотрим частичную сумму искомого ряда $S_n = \sum\limits_{k=9}^{n}\frac{2}{k^2-14k+48}$. С помощью метода неопределённых коэффициентов можно представить дробь $\frac{2}{k^2-14k+48} = \frac{2}{(k-8)(k-6)}$ в виде разности двух дробей, т. е. $\frac{2}{k^2-14k+48} = \frac{1}{k-8} - \frac{1}{k-6}$. Следовательно, частичная сумма представима в виде $S_n = \sum\limits_{k=9}^{n}\frac{1}{k-8} - \sum\limits_{k=9}^{n}\frac{1}{k-6}$.

Напомним, что если индекс суммирования увеличить (уменьшить) на некоторое число, а пределы суммирования уменьшить (увеличить) на то же число, то сумма от этого не изменится.

В первой сумме индекс суммирования на единицу увеличим, а во второй – уменьшим. Соответственно пределы суммирования в первой сумме должны быть на единицу уменьшены, а во второй – увеличены. С учётом изложенного частичную сумму ряда можно переписать в виде $S_n = \sum\limits_{k=8}^{n-1}\frac{1}{k-7} - \sum\limits_{k=10}^{n+1}\frac{1}{k-7}$. Приведём обе суммы к одинаковым пределам суммирования. Для этого из под знака первой суммы «вынесем» первое и второе слагаемые, а из под знака второй суммы – предпоследнее и последнее.

Итак, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=10}^{n-1}\frac{1}{k-7} - \sum\limits_{k=10}^{n-1}\frac{1}{k-7} - \frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-6} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-6}$. Так как по определению сумма ряда равна пределу его частичной суммы, то $S = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = \frac{3}{2}$

<u>Четвёртый семестр</u>

Задачи для самостоятельного решения
(методические указания даны ниже в разделе «примеры содержательного описания решения типовых задач» после вопросов для подготовки к экзамену)

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейные интегралы

1. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$. **2.** $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$. **3.** $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dy + (x-y)dx$.

4. $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$. **5.** $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)dx + (6x^2y^2-5y^4)dy$.

6. $\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$.

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами

1. $u_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$. **2.** $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}dx$. **3.** $u_n = \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx}$.

4. $u_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x\,dx}{1+x}$. **5.** $u_n = \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$. **6.** $u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы

1. $\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, где C – окружность $x^2+y^2=a^2$.

2. $\oint\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$, где C – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. $\oint\limits_C e^x\left[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy\right]$, где C – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 \le x \le \pi, 0 < y < \sin x$.

4. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$.

5. Найти значение интеграла $\oint\limits_C \left[x\cos(n,x) + y\cos(n,y)\right]ds$, где C – простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S, и n – внешняя нормаль к ней.

6. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где C – простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат и не окружающий его, пробегаемый в положительном направлении.

Вычислить двойные интегралы

1. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$, где область Ω ограничена кривой $x^2+y^2=x+y$.

2 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, где область Ω ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)dxdy$. **4.** $\iint\limits_{x^4+y^4\le 1}(x^2+y^2)dxdy$. **5.** $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 2}}\sqrt{|y-x^2|}dxdy$.

6. $\iint\limits_{\Omega} xydxdy$, где область Ω ограничена кривыми $xy=1,\quad x+y=\frac{5}{2}$.

Вводя обобщенные полярные координаты r и φ по формулам $x = ar\cos^{\alpha}\varphi,\quad y = br\sin^{\alpha}\varphi\quad (r\ge 0)$, найти площади, ограниченные заданными кривыми (параметры считаются положительными)

1. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2);\quad x^2+y^2\ge a^2$. **2.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

3. $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2;\quad x\ge 0,\ y\ge 0$. **4.** $(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2)$.

5. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};\quad x=0,\ y=0$. **6.** $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};\quad (x>0,\ y>0)$.

Найти объемы тел, ограниченные указанными поверхностями (параметры предполагаются положительными)

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\quad (z>0)$.

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **3.** $z^2=xy,\quad x^2+y^2=a^2$.

4. $z=x+y,\quad (x^2+y^2)^2=2xy,\quad z=0\quad (x>0,\ y>0)$.

5. $z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=x,\quad x^2+y^2=2x,\quad z=0$.

6. $z=e^{-(x^2+y^2)},\quad z=0,\quad x^2+y^2=R^2$.

Вычислить тройные интегралы

1. $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, где граница области V задана уравнениями

$$z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0.$$

2. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где область V ограничена поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

3. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями

$$x^2+y^2=z^2,\ z=1.$$

4. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где граница области V задана уравнением

$$x^2+y^2+z^2=z.$$

5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$.

6. $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$, где V – внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах функции

1. $f(x)=\begin{cases} A, & если\ 0<x<l; \\ 0, & если\ l<x<2l, \end{cases}$ где A – постоянная, в интервале $(0,2l)$.

2. $f(x)=\begin{cases} ax, & если\ -\pi<x<0; \\ bx, & если\ 0<x<\pi, \end{cases}$ где a,b – постоянные, в интервале $(-\pi,\pi)$

.

3. $f(x)=\pi^2-x^2$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

4. $f(x)=x\sin x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

5. $f(x)=x\cos x$ в интервале $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

6. $f(x)=shax$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

1-я контрольная точка. Темы № **16-18**. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

2-я контрольная точка. Темы № **19-21**. По текущей работе студента и за посещаемость – 15 баллов. По итоговому контролю за модуль – 15 баллов. Всего 30 баллов.

Экзамен 40 баллов.

Наибольшее количество баллов за семестр равно 100.

Вопросы для подготовки к экзамену

Определение равномерной сходимости функциональной последовательности к предельной функции и условие равномерной сходимости.

Признаки равномерной сходимости рядов.

Функциональные свойства суммы ряда.

Почленный переход к пределу.

Почленное интегрирование рядов.

Почленное дифференцирование рядов.

Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

Радиус и область сходимости степенного ряда.

Определение интегралов с бесконечными пределами. Аналогия с рядами.

Сходимость несобственного интеграла (с бесконечными пределами) в общем случае.

Используя признак Дирихле, исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{\cos ax}{1+x^n}dx \ \ (n>0, a\neq 0)$.

Определение несобственных интегралов от неограниченных функций.

Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Главные значения несобственных интегралов.

Найти $F'(\alpha)$, если $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$.

Предельный переход под знаком несобственного интеграла.

Главные значения несобственных интегралов.

Найти $V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} arctgx dx$.

Вычислить $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2}dx$. Например, внести x под знак дифференциала и воспользоваться подстановкой $t=x^2$.

Вычислить $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Например, воспользоваться подстановкой $t=\sqrt{x^2-1}$.

Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. Например, воспользоваться подстановкой $x=\sin t$ и учесть, что $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

Вычислить $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{x^{2/3}}dx$.

Вычислить $V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$.

Интегралы, зависящие от параметра.

Задача об объёме. Двукратный интеграл.

Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x+y+z=1$, $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$.

В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если Ω – трапеция с вершинами: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$.

Замена переменных в двойном интеграле.

Переходя к полярным координатам заменить двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f(\frac{y}{x})dx\,dy$ однократным.

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.

Вычисление тройных интегралов (приведение к повторному интегралу в декартовой системе координат).

Элемент объёма в криволинейных координатах. Цилиндрические и сферические координаты.

Вычислить объём тела $V = \iiint\limits_{\Omega} dv$, где Ω – область тела, ограниченного поверхностями: $z = 3 - x - y,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0$. Указание. Например, $\iiint\limits_{\Omega} dv$ = $\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz$ = $\iint\limits_{\sigma_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$, где σ_{xy} – проекция тела на плоскость Oxy, а $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ – поверхности, определяющие, соответственно, точки входа и выхода при фиксированных значениях x и y.

Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{V} z\,dx\,dy\,dz$, где тело V ограничено конической поверхностью $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = h$. Указание. Воспользоваться цилиндрической системой координат.

Формула Остроградского (связь между трехкратным интегралом по объёму и интегралом по поверхности, ограничивающей этот объем).

С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{S} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона границы куба: $0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le a,\ \ 0 \le z \le a$. Указание. Учесть, что $\iiint\limits_{V}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dV$ = $\iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$.

Проинтегрировать по частям $\iiint\limits_{V}\varphi\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)dV$, где конечный объем V ограничен поверхностью S. Указание. Учесть, что $\iiint\limits_{V}\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}dV$ = $\iint\limits_{S}\varphi\psi\cos(n, x_i)ds$ – $\iiint\limits_{V}\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}dV$, где x_i = x, y или z.

Найти площадь $S=\iint\limits_{S} dS$ участка поверхности, вырезаемого цилиндром $x^2+y^2=R^2$ $(x>0, y>0)$ из гиперболического параболоида $z=xy$. Указание. Элемент площади поверхности dS связан с элементом площади $d\sigma=dxdy$ проекции части кривой поверхности на плоскость Oxy соотношением $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, если уравнение поверхности имеет вид $z=f(x,y)$.

Вычислить $\iiint\limits_{V} xyz\,dx\,dy\,dz$, где объем V – ограничен поверхностями: $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0, y=0, z=0$ и расположен в первом октанте. Указание. Воспользоваться сферической системой координат.

Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$. Указание. Воспользоваться цилиндрической системой координат.

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$, где область V – ограничена поверхностями: $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

Вычислить площадь поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2\le R^2$ $(R\le a)$. Указание. Элемент площади поверхности dS связан с элементом площади $d\sigma=dxdy$ проекции части кривой поверхности на плоскость Oxy соотношением $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, если уравнение поверхности имеет вид $z=f(x,y)$.

Вычислить объём тела $V = \iiint\limits_{\Omega} dv$, где Ω – область тела, ограниченного поверхностями: $z=3-x-y,\quad x^2+y^2=1,\quad z=0$.

Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{S} x\,dS$, где S – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, лежащая в первом октанте $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$. Указание. Элемент площади поверхности dS связан с элементом площади проекции на плоскость Oxy соотношением $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, если уравнение поверхности имеет вид $z=f(x,y)$.

Определение криволинейного интеграла первого рода.

Вычислить $\int\limits_{C} y^2 dl$, где C – кривая $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$. Указание. Воспользоваться тем, что $dl = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

Определение криволинейного интеграла второго рода.

Вычислить $\int\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy$, где C – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемый против часовой стрелки. Указание. Воспользоваться формулой Грина или параметрическим заданием эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Вычислить $\int\limits_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, где C – окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против часовой стрелки. Указание. Воспользоваться параметрическим заданием окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода, когда уравнение кривой задано в параметрической форме.

Вычислить $\int\limits_C ydx+xdy$, где C – четверть окружности $x=R\cos t, y=R\sin t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода в случае плоской кривой, заданной явным уравнением.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2dy$ вдоль линий: **а)** $y = x$; **б)** $y = x^2$; **в)** $y = x^3$; **г)** $y^2 = x$.

Площадь и криволинейный интеграл.

Доказать, что величина интеграла $\int\limits_C (2xy-y)dx+x^2dy$, где C – замкнутый контур, выражает площадь области, ограниченной этим контуром. Указание. Воспользоваться формулой Грина.

Определение криволинейного интеграла первого и второго рода.

Формула Грина (связь между интегралом по плоской области и интегралом по её границе).

Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2dx+xydy$: **а)** вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки $(1,0)$ в точку $(0,1)$; **б)** вдоль четверти окружности $x=\cos t, y=\sin t$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$.

С помощью формулы Грина вычислить $\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, где C: **а)** эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; **б)** окружность $x^2+y^2=ax$. Интегрирование ведется в положительном направлении.

Формула Стокса (связь криволинейного интеграла по контуру поверхности с интегралом по самой поверхности).

Интеграл $\int\limits_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, «натянутой» на этот контур. Указание. Учесть, что

$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ = $\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$, где контур C ограничивает незамкнутую поверхность S.

Найти площадь эллипса $x = a\cos t,\ y = a\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$ с помощью криволинейного интеграла. Указание. Например, воспользоваться формулой S = $\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$, где C – контур, ограничивающий указанную область.

Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости.

Убедиться в том, что интеграл $\int_C f(xy)(ydx + xdy)$, взятый по замкнутому контуру, равен нулю независимо от вида функции f, входящей в подынтегральное выражение.

С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}dx + y\left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right)dy$. Указание. Воспользоваться тем, что $\int_C Pdx + Qdy$ = $\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dS$.

Правило нахождения первообразной $U(x, y)$ = $\int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $+ C$ подынтегрального выражения $Pdx + Qdy$, являющегося полным дифференциалом. Указание. Учесть, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$ и проинтегрировать по сторонам прямоугольника, вершинами которого являются точки (x_0, y_0) и (x, y). Стороны прямоугольника параллельны координатным осям.

Формула Стокса.

Найти функцию по данному её полному дифференциалу du = $\frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$. Указание. Учесть, что du = $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Далее, например, $u(x, y)$ = $\int \frac{\partial u}{\partial x}dx$ + $\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция. Полученный «результат» надо продифференцировать по переменной y и приравнять к производной $\frac{\partial u}{\partial y}$, что позволит найти функцию $\varphi(y)$ с точность до произвольной постоянной C.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\int_C xy^2dy - x^2ydx$, где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C (x+y)dx-(x-y)dy$, где C – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Указание. Учесть, что $\int\limits_C Pdx+Qdy$ $= =\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dS$.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ (начало координат не лежит на контуре интегрирования). Указание. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. И, либо, найти первообразную, либо, проинтегрировать по сторонам прямоугольника, вершинами которого являются точки $(3,4)$ и $(5,12)$. Стороны прямоугольника параллельны координатным осям.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где точки P_1 и P_2 расположены на концентрических окружностях с центрами в начале координат и радиусами соответственно R_1 и R_2 (начало координат не лежит на контуре интегрирования). Указание. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти первообразную.

Применяя формулу Грина вычислить интеграл $\int\limits_C xy^2dy-x^2ydx$, где C – окружность $x^2+y^2=a^2$.

Примеры содержательного описания решения типовых задач

1. Вычислить интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Разлагая подынтегральную функцию на сумму двух дробей, используя метод неопределённых коэффициентов, получим: $\frac{1}{x^2+x-2}$ = $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ = $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$ = $\frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$ и из системы уравнений $\begin{cases} A+B=0, \\ 2A-B=1 \end{cases}$ найдём, что $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{x^2+x-2}$ = $\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+2)}$. Но записать искомый интеграл в виде разности двух несобственных интегралов $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ = $\frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$ – $\frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$ нельзя, т. к. каждый из интегралов в правой части последнего равенства расходящийся. Поэтому воспользуемся определением несобственного интеграла, для чего рассмотрим определённый интеграл $\int\limits_2^{A} \frac{dx}{x^2+x-2}$ = $\frac{1}{3}\int\limits_2^{A} \frac{dx}{x-1}$ – $\frac{1}{3}\int\limits_2^{A} \frac{dx}{x+2}$ = $\frac{1}{3}\Big[\ln(x-1)$ – $\ln(x+2)\Big]_2^A$ = $\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_2^A$ = $\frac{1}{3}\left(\ln\frac{A-1}{A+2}-\ln\frac{1}{4}\right)$ = $\frac{1}{3}\ln\frac{4(A-1)}{A+2}$.

По определению $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_2^{A}\frac{dx}{x^2+x-2}$, то есть $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{4(A-1)}{A+2} = \frac{1}{3}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\frac{4\left(1-\frac{1}{A}\right)}{1+\frac{2}{A}} = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2$.

2. Найти интеграл $v.p.\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Решение. В данном случае пределы интегрирования конечны, но подынтегральная функция неограниченна в рассматриваемом промежутке.

Под главным значением несобственного интеграла на отрезке $[a,b]$ от функции $f(x)$ в смысле Коши $(v.p.)$ понимается число $v.p.\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$, где c принадлежит интервалу (a,b) и является особой точкой, т. е. подынтегральная функция в её окрестности неограниченна.

Итак $v.p.\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{d\ln x}{\ln x} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d\ln x}{\ln x}\right] = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|\ln x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} + \ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|\ln(1-\varepsilon)| - \ln\ln 2 + \ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon)\right] = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right| = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{-\varepsilon+O(\varepsilon^2)}{\varepsilon+O(\varepsilon^2)}\right| = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{-1+O(\varepsilon)}{1+O(\varepsilon)}\right| = \ln 1 = 0$. При нахождении предела было учтено, что $\ln(1+\alpha) = \alpha+O(\alpha^2)$ для достаточно малых значений α.

3. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

Решение. Возможность предельного перехода под знаком интеграла $\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$, зависящего от параметра α, даётся теоремой.

Если функция $f(x,\alpha)$ при постоянном значении α интегрируема по x в промежутке $[a,b]$ и при $\alpha\to\alpha_0$ стремится к предельной функции $\varphi(x) = \lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)$ равномерно относительно x, то имеет место равенство $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx = \int\limits_a^b\varphi(x)dx$.

Подынтегральная функция $f(x,\alpha) = \dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ имеет конечную предельную функцию $\varphi(x) = \lim\limits_{\alpha\to 0} f(x,\alpha) = \dfrac{1}{1+x^2}$ и стремится к ней равномерно.

Для доказательства последнего утверждения покажем, что для любого сколь угодно малого произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется не зависящее от x число $\delta > 0$, такое, что при $|\alpha| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x,\alpha) - \varphi(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех значений x.

По определению это и будет означать равномерное относительно x стремление функции $f(x,\alpha)$ к предельной функции $\varphi(x)$.

Итак, $|f(x,\alpha)-\varphi(x)| = \left|\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2} - \dfrac{1}{1+x^2}\right| = \left|\dfrac{1+x^2-1-x^2-\alpha^2}{(1+x^2+\alpha^2)(1+x^2)}\right| = \dfrac{\alpha^2}{(1+x^2+\alpha^2)(1+x^2)} \le \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2} < \alpha^2 < |\alpha| < \varepsilon$. Следовательно, за число δ можно принять ε.

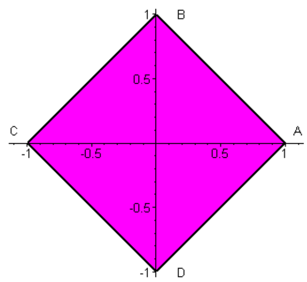
Нетрудно заметить, что подынтегральная функция $f(x,\alpha)$ при постоянном значении α интегрируема по переменной x. Поэтому можно воспользоваться теоремой о предельном переходе под знаком интеграла, т. е. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int\limits_0^1 \varphi(x)dx = \int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\, x\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^{2\pi}dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

Решение. Запишем исходный интеграл в виде суммы двух интегралов и во втором из них изменим направление интегрирования $\int\limits_0^{2\pi}dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy = \int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\pi}^{2\pi}dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy = \int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy - \int\limits_{\pi}^{2\pi}dx\int\limits_{\sin x}^{0} f(x,y)dy$. В каждом из интегралов в правой части изменим порядок интегрирования, учитывая, что $Arc\sin y = (-1)^k \arcsin y + \pi k$. При изменении y от 0 до 1 переменная x изменяется от $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$, а при изменении y от -1 до 0 переменная x изменяется от $\pi - \arcsin y$ до $2\pi + \arcsin y$. Окончательно получим

$$\int\limits_0^{2\pi}dx\int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx - \int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$$

5. Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy$ к однократному.



Решение. Нетрудно изобразить область интегрирования. Она симметрична относительно осей и начала координат. В первом квадранте при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ – это равнобедренный прямоугольный треугольник, где $0 \leq x \leq 1$ и $y \leq -x+1$.

Итак, областью интегрирования является квадрат.

Введём новые переменные $u = x + y$, $v = x - y$. Легко найти, что $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$.

При такой замене переменных прямая $y = -x+1$, содержащая отрезок AB, отобразится в прямую $u = 1$, т. к. при подстановке $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ в уравнение данной прямой получим $u = 1$. Совершенно аналогично прямая $y = x+1$, содержащая отрезок BC, отобразится в прямую $v = -1$; прямая $y = -x-1$, содержащая отрезок CD, отобразится в прямую $u = -1$; прямая $y = x-1$, содержащая отрезок DA, отобразится в прямую $v = 1$.

Так как на отрезке оси Ox при $y = 0$ и $-1 \leq x \leq 1$: $-1 \leq \dfrac{u+v}{2} \leq 1$ и $u = v$, то $-1 \leq u \leq 1$, а на отрезке оси Oy при $x = 0$ и $-1 \leq y \leq 1$: $-1 \leq \dfrac{u-v}{2} \leq 1$ и $u = -v$, то $-1 \leq -v \leq 1$ или $-1 \leq v \leq 1$.

Таким образом, квадрат, заданный в плоскости Oxy, при указанной замене переменных преобразуется в квадрат $[-1,1;-1,1]$ со сторонами, параллельными осям координат в плоскости Ouv. Якобиан данного преобразования $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$ и $|J| = \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du = \int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du.$$

6. Переходя к полярным координатам, найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Объем V тела, ограниченного поверхностью Ω, равен

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} dxdy \int\limits_{0}^{e^{-(x^2+y^2)}} dz = \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и с учетом того, что якобиан преобразования равен r, получим $V = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} e^{-r^2} r\,dr = \pi\int\limits_{0}^{R} e^{-r^2} dr^2 = -\pi e^{-r^2}\Big|_{0}^{R} = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$. Ясно, что $x^2 + y^2 = R^2$ и есть цилиндр, проектирующий часть поверхности $z = e^{-(x^2+y^2)}$, вырезаемую им, на плоскость

Oxy, поэтому область σ – это круг, уравнение которого $x^2+y^2 \le R^2$, что и было учтено при определении и расстановке пределов интегрирования.

7. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_l \left(x^2+y^2\right)dl$, где l – кривая $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $\left(0\le t\le 2\pi\right)$;

Решение. Так как кривая (l) задана параметрически: $x=x(t), y=y(t)$ $\left(t_0\le t\le T\right)$, то для вычисления криволинейного интеграла первого рода надо заменить в подынтегральной функции переменные x и y их выражениями через параметр, а dl – дифференциалом дуги $\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt$, т. е. $\int\limits_l f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt$.

Итак, $x'(t) = at\cos t$, $y'(t) = at\sin t$, $\sqrt{x'^2+y'^2} = at$, $x^2+y^2 = a^2\left(1+t^2\right)$. Следовательно, $\int\limits_l \left(x^2+y^2\right)dl = a^3\int\limits_0^{2\pi} t\left(1+t^2\right)dt = a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(t+t^3\right)dt = a^3\left(\frac{4\pi^2}{2}+\frac{16\pi^4}{4}\right) = 2a^3\pi^2\left(1+2\pi^2\right)$.

8. Применив формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l xy^2dy-x^2ydx$, где l – окружность $x^2+y^2=a^2$.

Решение. Функции xy^2 и x^2y непрерывны вместе со своими частными производными в области, ограниченной замкнутым контуром l, и на ее границе, поэтому применима формула Грина, связывающая двойной и криволинейный интегралы $\int\limits_l Pdx+Qdy = \iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. Согласно ей имеем $\int\limits_l xy^2dy - x^2ydx = \iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\right)\right]dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$. Перейдем к полярным координатам $\left(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi\right)$ и, учитывая, что якобиан преобразования равен r, получим $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}r^3dr = \frac{\pi a^4}{2}$.

9. Определить площадь части винтовой поверхности $x=\xi\cos\eta$, $y=\xi\sin\eta$, $z=c\eta$, вырезанной из неё цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $z=0$ и $z=2\pi c\ (c>0)$.

Решение. Из условия задачи нетрудно заметить, что $0\le\eta\le 2\pi$, а $0\le\xi\le a$. Гауссовы коэффициенты легко вычисляются и равны: $E=1$, $G=\xi^2+c^2$, $F=0$. Следовательно, $dS = \sqrt{EG-F^2}d\xi d\eta = \sqrt{\xi^2+c^2}d\xi d\eta$ и площадь указанной части поверхности $S = \int\limits_0^{2\pi}d\eta\int\limits_0^{a}\sqrt{\xi^2+c^2}d\xi = 2\pi\int\limits_0^{a}\sqrt{\xi^2+c^2}d\xi$.

Вычислим интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{\xi^2+c^2}\,d\xi = \int\limits_0^a \frac{\left(\xi^2+c^2\right)d\xi}{\sqrt{\xi^2+c^2}} = \int\limits_0^a \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2+c^2}} + c^2\int\limits_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+c^2}} = \int\limits_0^a \xi\, d\sqrt{\xi^2+c^2} + c^2\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+c^2}\right)\Big|_0^a = \xi\sqrt{\xi^2+c^2}\Big|_0^a - \int\limits_0^a \sqrt{\xi^2+c^2}\,d\xi + c^2\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+c^2}\right)\Big|_0^a$. После очевидных преобразований получили, что в правой части равенства имеется такой же интеграл, что и в левой. Перенося его в левую часть и деля полученное равенство на два, найдём что $\int\limits_0^a \sqrt{\xi^2+c^2}\,d\xi = \frac{1}{2}\left[\xi\sqrt{\xi^2+c^2}+c^2\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+c^2}\right)\right]\Big|_0^a = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+c^2}\right)-c^2\ln c\right] = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)$.

Следовательно, $S = \pi\left(a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right)$.

10. Функцию $f(x)=e^{ax}$ разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$.

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть представлена рядом Фурье.

Ряд Фурье имеет вид $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$, где $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$, $k=0,1,2,\ldots$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$, $k=1,2,\ldots$.

Найдём коэффициенты Фурье: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{1}{a\pi}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi} = \frac{2}{a\pi}sh a\pi$, $\frac{a_0}{2} = \frac{sh a\pi}{a\pi}$. Для $k\ge 1$ значения коэффициентов вычисляются по формуле $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx\,dx$.

Найдем, чему равен интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,de^{ax} = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + k\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx\right) = \frac{k}{a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,de^{ax} + \frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)(-1)^k}{a} = \frac{k}{a^2}e^{ax}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k^2}{a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx dx + \frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)(-1)^k}{a}$. В правой части равенства получили тот же интеграл, что и в левой, следовательно, $\frac{a^2+k^2}{a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx\,dx =$

$\left(-1\right)^k \dfrac{2sha\pi}{a}$ и $a_k = (-1)^k \dfrac{2a\,sha\pi}{\pi(a^2+k^2)}$. Заметим, что в данном случае из последней формулы можно найти коэффициент a_0.

Совершенно аналогично найдем, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx = \dfrac{1}{a}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,de^{ax} =$ $\dfrac{1}{a}\left(e^{ax}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - k\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos k\,x dx\right) = -\dfrac{k}{a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,de^{ax} = -\dfrac{k}{a^2}\Big(e^{ax}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} +$ $k\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx\Big) = -\dfrac{k\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)(-1)^k}{a^2} - \dfrac{k^2}{a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx$, откуда с учетом того, что в правой части получили тот же интеграл, что и в левой, следует, что $\dfrac{a^2+k^2}{a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx = -\left(-1\right)^k \dfrac{2k\,sha\pi}{a^2}$ и $b_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx = \left(-1\right)^{k-1}\dfrac{2k\,sha\pi}{\pi\left(a^2+k^2\right)}$.

Таким образом, придем к разложению

$$e^{ax} = \frac{2sha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k \frac{a\cos kx - k\sin kx}{a^2+k^2}\right) \quad \left(-\pi < x < \pi\right).$$

Заметим, что коэффициенты Фурье можно найти значительно проще, если использовать формулу Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ и комплексную функцию действительного аргумента $F(x) = e^{ax}(\cos kx + i\sin kx) = e^{(a+ik)x}$, тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx\,dx = \mathrm{Re}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(a+ik)x}\,dx$, а $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx\,dx = \mathrm{Im}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(a+ik)x}\,dx$.

Вычислим интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} F\left(x\right)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(a+ik)x}\,dx = \dfrac{e^{(a+ik)x}}{a+ik}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{e^{(a+ik)\pi} - e^{-(a+ik)\pi}}{a+ik} =$ $\dfrac{e^{a\pi}e^{ik\pi} - e^{-a\pi}e^{-ik\pi}}{a+ik} = \dfrac{e^{a\pi}\left(\cos k\pi + i\sin k\pi\right) - e^{-a\pi}\left(\cos k\pi - i\sin k\pi\right)}{a+ik} = \dfrac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)\cos k\pi}{a+ik} =$ $\left(-1\right)^k\dfrac{2sha\pi}{a+ik} = \left(-1\right)^k\dfrac{2}{a^2+k^2}\left(a\,sha\pi - i\,k\,sha\pi\right)$. Разделяя действительную и мнимую части, получим требуемый результат.

Возможные темы курсовых работ

Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

1. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
2. $z = x^2y^3\left(6 - x - y\right)$.
3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
4. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
5. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

6. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$.

7. $z = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

8. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

9. $z = e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right)$.

10. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad (0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \pi)$.

Найти точки условного экстремума функции и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

1. $z = xy$, если $x + y = 1$.

2. $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$, если $x^2 + y^2 = 1$.

3. $z = x^2 + y^2$, если $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

4. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, если $x^2 + y^2 = 1$.

5. $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, если $4x^2 + y^2 = 25$.

6. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, если $x - y = \dfrac{\pi}{4}$.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x, y и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

2. $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

3. $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$.

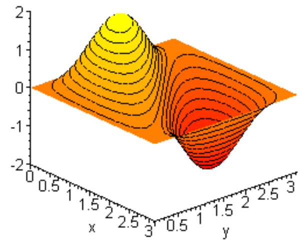
Пример содержательного описания (краткого) РГР.

Исследовать на экстремум функцию $z = \sin x \sin y \sin(x + y) \quad (0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi)$ и изобразить соответствующую поверхность, используя какой-либо графический пакет прикладных программ.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос найдем от заданной функции частные производные первого порядка $z'_x = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin y\left[\sin(x + y)\cos x + \cos(x + y)\sin x\right] = \sin y \sin(2x + y)$, $z'_y = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = \sin x\left[\sin(x + y)\cos y + \cos(x + y)\sin x\right]$

$=$ $\sin x \sin(x+2y)$. Приравнивая их к нулю, придем к системе уравнений $\begin{cases}\sin y \sin(2x+y)=0,\\ \sin x \sin(x+2y)=0\end{cases}$ для отыскания координат стационарных точек.

Заметим, что определение экстремума предполагает то, что точка, в которой он может достигаться, должна быть «внутренней» (речь не идет о наименьшем и наибольшем значении функции в заданной области). Поэтому граничные точки $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π), являющиеся решениями данной системы уравнений, из рассмотрения исключаем. Из первого уравнения системы $\begin{cases}\sin(2x+y)=0,\\ \sin(x+2y)=0\end{cases}$ найдем $2x+y$ $=\pi k$ и y $=\pi k-2x$. Подставляя указанное выражение во второе уравнение, получим $\sin 3x=0$, откуда $x=\dfrac{\pi n}{3}$, причем n с учетом условия $0<x<\pi$ может равняться только единице или двум. Поэтому $x=\dfrac{\pi}{3}$ или $x=\dfrac{2\pi}{3}$. Этим двум значениям переменной x с учетом того, что $0<y<\pi$, соответствуют два значения переменной y: $y=\dfrac{\pi}{3}$ и $y=\dfrac{2\pi}{3}$.



Таким образом, внутри рассматриваемой области имеются две стационарные точки, координаты которых равны: $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $y_0=\dfrac{\pi}{3}$ и $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$, $y_0=\dfrac{2\pi}{3}$. Найдем частные производные второго порядка: z''_{x^2} $=$ $=2\sin y\cos(2x+y)$, z''_{y^2} $=$ $2\sin x\cos(2x+y)$, z''_{xy} $=$ $\sin 2(x+y)$. Вычислим значения вторых производных в стационарных точках.

При $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $y_0=\dfrac{\pi}{3}$ имеем a_{11} $=$ z''_{x^2} $=$ $-\sqrt{3}$, a_{22} $=$ z''_{y^2} $=$ $-\sqrt{3}$, a_{12} $=$ z''_{xy} $=$ $=$ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ $=$ $3-\dfrac{3}{4}$ $=$ $\dfrac{9}{4}>0$ и т. к. $a_{11}<0$, то в этой точке функция имеет максимум, а именно z $=$ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

При x_0 $=$ $\dfrac{2\pi}{3}$, y_0 $=$ $\dfrac{2\pi}{3}$ получим a_{11} $=$ z''_{x^2} $=$ $\sqrt{3}$, a_{22} $=$ z''_{y^2} $=$ $\sqrt{3}$, a_{12} $=$ z''_{xy} $=$ $=$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ $=$ $3-\dfrac{3}{4}$ $=$ $\dfrac{9}{4}>0$, $a_{11}>0$, следовательно, в этой точке функция z имеет минимум, равный $-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

VII. Материально-техническое обеспечение

Для аудиторной работы.

Учебная аудитория № 304 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, комплект аудиотехники (радиосистема, стационарный микрофон с настольным держателем, усилитель, микшер, акустическая система), проектор, ноутбук.
Учебная аудитория № 20 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.
Учебная аудитория № 308 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.
Учебная аудитория № 206 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, экран, проектор.
Учебная аудитория № 7 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели
Учебная аудитория № 310 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели

Для самостоятельной работы.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся: Компьютерный класс №3 факультета ПМиК № 4в *170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый пере-*	Компьютер, экран, маркерная доска, проектор, кондиционер.

улок, д.35	

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.			
2.			
3.			
4.			