Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

___________ Шаров Г.С.

«___»___________2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Методы комплексного анализа

Направление подготовки

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Профиль подготовки

Математические основы информатики

Для студентов 3 курса очной формы обучения

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Составитель: к.ф.-м.н., доцент С.Ю. Граф

Тверь, 2023

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины «Методы комплексного анализа» состоит в изучение основных понятий этой дисциплины, необходимых для освоения ООП и последующей профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы комплексного анализа» относится к части дисциплин, формируемой участниками образовательных отношений. В плане формирования компетенций одна связана с дисциплинами «Математический анализ», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», «Физика».

3. Объём дисциплины:

6 зачетных единиц, 216 академических часов,
в том числе: контактная работа: лекции – 34 часа, правктические занятия – 34 часа, в т.ч. практическая подготовка – 2 часа; самостоятельная работа – 148 часов.

4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ПК-1 Способен использовать базовые знания в области математических и естественных наук, программирования и информационных технологий	ПК-1.1 Формулирует проблемы и определяет направление их решения на основе базовых знаний математики, естественных наук, программирования и информационных технологий ПК-1.2 С помощью стандартных методов решает типовые задачи в области математики, естествознания и информатики ПК-1.3 Применяет методы и приемы из области математики, физики и информатики для решения задач профессиональной деятельности

5. Форма промежуточного контроля экзамен (5 семестр).

6. Язык преподавания русский**.**

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа (час.)
		лекции	Практические занятия	в т.ч. практическая подготовка	
Раздел 1 **Поле комплексных чисел**	**22**	**4**	**4**		**14**
Поле комплексных чисел, аксиоматика множества комплексных чисел.	4	1	1		2
Модуль и аргумент комплексного числа. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Степень и радикал, формула Муавра.	6	1	1		4
$\mathbf{C}$ как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса. Полнота и компактность расширенной комплексной плоскости.	8	2	2		4
Топологии в $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).	4	0	0		4
Раздел 2 **Функции комплексного переменного**	**30**	**6**	**6**		**18**
Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, континууме, в области.	10	2	2		6
Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного анализа. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Формальные производные. Критерий моногенности и ф.к.п. в точке, условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.	12	2	2		8
Касательное отображение и якобиан дифференцируемого отображения. Локальное поведение дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом. Локальное поведение голоморфного отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функ-	8	2	2		4

ции. Определение конформного отображения в точке и области. Достаточные условия конформности отображения. Основные принципы теории конформных отображений, теорема Римана о конформных отображениях.					
Раздел 3 **Интегралы от функций комплексного переменного**	**26**	**10**	**4**		**12**
Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.	5	2	1		2
Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.	7	2	1		4
Интегральная формула Коши.	5	2	1		2
Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.	4	2	0		2
Первообразная от ф.к.п. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.	5	2	1		2
Раздел 4 **Ряды Тейлора и Лорана**	**36**	**8**	**8**		**20**
Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.	9	2	2		5
Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Действия со степенными рядами, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.	9	2	2	1	5
Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.	8	2	2		4
Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.	8	2	2		4
Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы. Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.	6	0	0		6
Раздел 6 **Изолированные особые точки и вычеты**	**66**	**6**	**12**		**48**
Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная	19	2	4		13

точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности.					
Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Вычисление вычета на бесконечности. Примеры. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.	24	2	4	1	18
Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительнозначных функций. Примеры.	18	2	4		12
Итого	**216**	**34**	**34**	**2**	**148**

III. Образовательные технологии

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

Образовательные технологии

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

Современные методы обучения

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации

Практические занятия по дисциплине «Комплексный анализ» необходимы для получения навыков применения теоретических знаний, полученных студентами на лекциях при решении конкретных практических задач. Решения задач фиксируются в тетрадях для практических работ и оцениваются согласно «Руководству по рейтинговой системе». Для более полного освоения материала в данном методическом руководстве по каждой изучаемой теме предлагаются *контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы*, результативность выполнения которых оценивается также с помощью рейтинговых баллов.

Типовые задачи для текущего контроля

Комплексные числа

1. Найти все значения радикала $\sqrt{1+\sqrt[3]{-1}}$.
1. Найти все значения $i^{\sin i}$.
2. Вычислить $\alpha = \mathrm{e}^{\ln 2 + i\pi/2}$ и изобразить точку на плоскости.
3. Вычислить $\mathrm{sh}(\ln 3 + \mathrm{i}\pi)$.
4. Вывести формулы стереографической проекции и формулу для сферического расстояния. Найти сферическое расстояние между точками 1 и ∞, i и $-i$.
5. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках ± 1 и данными полуосями, параболы $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$, отрезка прямой, соединяющей две точки.

Голоморфные функции

6. Является ли функция $w = z\mathrm{e}^{2i\bar{z}}$ голоморфной в начале координат? Доказать голоморфность функций $\sin z$ и $\mathrm{ch}\, z$ на $\mathbf{C}$.
7. Восстановить голоморфную функцию по заданной ее реальной части $u = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 + \mathrm{e}^x \sin y,\ (x,y)\in\mathbf{C}$.

Конформные отображения

8. Методом слоений найти образы верхнего единичного полукруга при преобразованиях $w = 1/z$, $w = 1/\bar{z}$ и $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
9. Найти общий вид мебиусовых преобразований верхней полуплоскости на себя, верхней полуплоскости на единичный круг, единичного круга на себя.
10. Какая часть плоскости сжимается при отображении $w = \dfrac{z}{2z-1}$? Какая часть плоскости растягивается при отображении $w = \mathrm{e}^{2iz}$?

Ряды Тейлора и Лорана

11. Найти область сходимости функционального ряда:

$$\text{(а)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2\nu}}{3^{\nu}}; \quad \text{(б)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^{\nu}(z); \quad \text{(в)} \sum_{\nu=-1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\nu}.$$

12. Найти нули и изолированные особые точки функций:

$$(\text{а})\ \frac{z\cos z}{\sin^2 z};\quad (\text{б})\ \frac{\sin^2 z}{e^z-1};\quad (\text{в})\ \frac{z^2-zi}{e^{1/z}+1}.$$

Определить порядки нулей и классифицировать и.о.т.

13. Представить рядами Лорана в проколотой окрестности точки $z=a$ следующие функции

$$(\text{а})\ \frac{z}{z^2-3z+2},\ a=1;\quad (\text{б})\ \frac{z^2}{z^3+1},\ a=\infty;$$

$$(\text{в})\ \frac{\sin^2 z}{z},\ a=0;\quad (\text{г})\ \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2},\ a=0.$$

Вычеты и их применение

14. Найти вычеты заданных функций в ее и.о.т., включая точку $z=\infty$:

$$(\text{а})\ \frac{\operatorname{tg} z-z}{(1-\cos z)^2};\quad (\text{б})\ \frac{z}{\operatorname{ch} z-1};$$

$$(\text{с})\ z^3\sin\frac{\pi}{z};\quad (\text{д})\ \sin z\cdot\sin\frac{1}{z}.$$

15. Вычислить с помощью теоремы о вычетах интегралы:

$$(\text{а})\ \oint\limits_{|z|=4}\frac{z}{z+3}e^{1/3z}\,dz;\quad (\text{б})\ \oint\limits_{|z+1|=2}\frac{dz}{z\sin z};$$

$$(\text{в})\ \oint\limits_{|z|=2} z\sin\frac{z+1}{z-1}\,dz;\quad (\text{г})\ \oint\limits_{|z|=1/2}\frac{dz}{(2+\sqrt{z-1})\sin z},\ \left(\sqrt{z-1}\Big|_{z=0}=i\right).$$

16. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

$$(\text{а})\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x\,dx}{x^4+5x^2+4};\quad (\text{б})\ \int_0^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^3)},\ 0<a<b;$$

$$(\text{с})\ \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-5x+6};\quad (\text{д})\ \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}.$$

17. Вычислить интегралы вида $\int_0^{2\pi}R(\sin\varphi,\cos\varphi)\,d\varphi$:

$$(\text{а})\ \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi};\quad (\text{б})\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ -1<a<1,\ n\in\mathbf{N};$$

$$(\text{в})\ \int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1-a\sin^2\varphi},\ 0<a<1;\quad (\text{г})\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi,\ n=0,1,\ldots$$

18. Вычислить несобственные интегралы от рациональных функций:

$$(\text{а})\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)};\quad (\text{б})\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ a>0,\ n\in\mathbf{N};$$

$$(\text{в})\ \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^3+1};\quad (\text{г})\ \text{v.p.}\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4-1}.$$

Контрольные работы (образцы задач)

Контрольная работа № 1

1. Выполнить арифметические действия над комплексными числами: а) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^5$; б) $(-\sqrt{6}+\sqrt{2}i)^5$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$;

д) $\sqrt[5]{64\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)}$; е) $\sqrt[5]{64\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)}$.

2. Изобразить на комплексной плоскости **C** области, заданные системами неравенств:

а) $\begin{cases} |z-3i|<2, \\ |\arg z-\pi/2|<\pi/6, \\ \operatorname{Im} z<4; \end{cases}$; б) $\begin{cases} |z-1+i|<2, \\ |\arg z-\pi/2|<\pi/3, \\ \operatorname{Im} z>-1. \end{cases}$.

3. Выяснить, какие линии на плоскости записаны следующими уравнениями:

а) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=0$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$.

4. Выяснить, какие множества на плоскости заданы следующими неравенствами:

а) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{2}$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}$.

5. Доказать тождества:

а) $|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$;

б) $|z_1\overline{z_2}-1|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

6. Пусть z_1 и z_2 - комплексные числа, а a_1 и a_2 - действительные числа ($a_1^2+a_2^2\neq 0$). Доказать неравенства:

а) $2\dfrac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}\geq|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2|$;

б) $2\dfrac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}\leq|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|$.

У к а з а н и е. Ввести вспомогательный угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=a_1/a_2$, представить левую часть доказываемого неравенства в виде $A+B\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$ и найти её соответственно наименьшее и наибольшее значения.

7. Доказать формулы:

а) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x},\ x\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

а) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x},\ x\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

8. Решить уравнения:

а) $\sin z=\dfrac{5}{3}$; б) $\cos z=\dfrac{3i}{4}$; в) $\operatorname{sh} z=0$; г) $\operatorname{ch} z=0$.

9. Доказать следующие равенства:

а) $\operatorname{Arcctg} z=\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z-i}{z+i}$; б) $\operatorname{Arctg} z=\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i+z}{i-z}$;

в) $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$; г) $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

10. Найти все значения следующих степеней:

а) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; б) $i^{\sin i}$.

Контрольная работа №2

1. Является ли функция $w = e^{2i\bar{z}}$ голоморфной в начале координат? Доказать, опираясь на теорему Коши-Римана, голоморфность на $\mathbf{C}$ следующих функций: а) $\sin z$; б) $\operatorname{ch} z$.
2. Найти множества точек, в которых функции моногенны, голоморфны и вычислить производные функций в этих точках:
   а) $f(z) = z(\bar{z} - 3\operatorname{Im} z)$; б) $f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$.
3. Восстановить голоморфные функции по их действительной части $U(x;y)$ или мнимой части $V(x;y)$:
   а) $V(x;y) = 3x^2y - y^3$, $f(i) = 0$; б) $U(x;y) = x^3 - 3xy^2$, $f(i) = 0$;
   в) $U(x;y) = e^{-y}\sin x + y$, $f(0) = 1$; г) $V(x;y) = e^{-y}\cos x + x$, $f(0) = 1$;
   д) $V(x;y) = y\cos y \operatorname{ch} x + x\sin y \operatorname{sh} x$, $f(0) = 0$;
   е) $U(x;y) = x\cos x \operatorname{ch} y + y\sin x \operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$.
4. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках ± 1 и данными полуосями, параболы $y = x^2,\ x \in \mathbf{R}$, отрезка прямой, соединяющей две точки.
5. Установить, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при следующих отображениях:
   а) $w = z^2 - 2z$; б) $w = \dfrac{z}{2z-1}$; в) $w = \dfrac{1+iz}{1-iz1}$; г) $w = e^{2iz}$.
6. Найти множества всех тех точек z_0, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:
   а) $w = z^2 - 2z$; б) $w = \dfrac{z}{2z-1}$; в) $w = \dfrac{1+iz}{1-iz1}$; г) $w = e^{2iz}$.
7. Найти длины образов следующих кривых Г при указанных отображениях:
   а) $\Gamma: z(t) = it + 1,\ t \in [0;1];\ f(z) = z^2$;
   б) $\Gamma: z(t) = (1+i)t,\ t \in [0;2\pi];\ f(z) = e^z$;
   в) $\Gamma: z(t) = it,\ t \in [0;2\pi];\ f(z) = e^z$;
   г) $\Gamma: z(t) = (1+i)t,\ t \in [0;1];\ f(z) = z^n,\ n \in \mathbf{N}$;
   д) $\Gamma: z(t) = e^{it},\ t \in [0;2\pi];\ f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.
8. Найти площади образов областей D при указанных отображениях:
   а) $D = \left\{z \in \mathbf{C}:\ 2 < |z| < 3,\ \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\};\ f(z) = z^2$;
   б) $D = \{z \in \mathbf{C}:\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ |\operatorname{Im} z| < \pi\};\ f(z) = e^z$;
   в) D – квадрат с вершинами в точках 0, 1, $i+1$, i; $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.
9. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами $(-1;0)$; $(-4;-1)$; $(-4;1)$ на треугольник с вершинами $(3;0)$; $(5;-6)$;

$(1;-6)$.

10. Доказать, что линии уровня модуля дробно-линейной функции являются обобщёнными окружностями.
11. Доказать, что линии уровня действительной части дробно-линейной функции являются обобщёнными окружностями.
12. Доказать, что образом обобщённой окружности при дробно-линейной функции является обобщённая окружность.
13. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ окружностями $|z|=1$, $|z-i|=1$ разбивается на четыре двуугольника. Выяснить, во что преобразуются данные области при отображении $w=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\Big/\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$.

Контрольная работа № 3

1. Опираясь на теорему Тейлора, доказать формулы:

а) $e^{z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n}}{n!},\ z\in\mathbf{C}$; б) $\operatorname{sh} z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in\mathbf{C}$.

1. Опираясь на разложение $e^{z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n}}{n!},\ z\in\mathbf{C}$, доказать формулы:

а) $e^{az}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{az_0}\frac{(z-z_0)^n}{n!},\ z\in\mathbf{C},\ z_0=\mathrm{const}\in\mathbf{C},\ a=\mathrm{const}\in\mathbf{C}$;

б) $\operatorname{sh} az=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1},\ z\in\mathbf{C},\ a=\mathrm{const}\in\mathbf{C}$;

в) $\sin^2 z$; г) $\sin^4 z+\cos^4 z$; д) $e^{z}\sin z$.

2. Опираясь на разложение $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^{n}$, справедливое при $|z|<1$, доказать формулы:

а) $\frac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^{n},\ |z|<1$; б) $\frac{1}{z^2+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}z^{2n},\ |z|<1$.

3. Найти разложение следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$:

а) $\frac{1}{(1+z)^2}$; б) $\frac{1}{(1-z^2)^2}$; в) $\frac{1}{(1+z^3)^2}$; г) $\frac{1}{(1-z^6)^3}$.

4. Доказать формулы:

а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+\frac{1}{4}\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{4n+1}}{4n+1},\ |z|<1$;

б) $\frac{1-z}{z}\ln(1-z)=-1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n}}{n(n+1)},\ |z|<1$.

5. Найти множества точек $z\in\mathbf{C}$, в которых сходятся следующие ряды Лорана:

а) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} z^n$; б) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$; в) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(2^{-n^3+1}\right)^{-1}(z-a)^{2n},\ a=\mathrm{const}\in\mathbf{C}$.

6. Опираясь на формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать следующие формулы:

а) $\dfrac{1}{z-b}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1}z^n,\ |z|>|b|$; б) $\dfrac{1}{z^2-b^2}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)}z^{2n},\ |z|>|b|$;

в) $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n;\ a\neq b,\ |z-a|>|b-a|$;

г) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z+a}{z-a}=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{1}{2n+1}a^{-2n-1}z^{2n+1},\ |z|>|a|$.

7. Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $1<|z|<2$:

а) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$; б) $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$; в) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$;

г) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$; д) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$; е) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^4+4)}$.

8. Следующие функции разложить в ряды Тейлора или Лорана по степеням $z-1$ и $z+3i$: а) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$; б) $\dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$.

9. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D:

а) $z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, $a=0,\ D:0<|z|<\infty$; б) $z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$, $a=0,\ D:0<|z|<\infty$;

в) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$, $a=2,\ D:0<|z-2|<\infty$;

г) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)}$, $a=0,\ D:0<|z|<1$; д) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)}$, $a=1,\ D:1<|z-1|<2$.

10. Найти вычеты следующих функций во всех их изолированных особых точках:

а) $\dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$; в) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}$; г) $z^2\sin\dfrac{\pi}{z}$;

д) $\dfrac{\cos z}{z-\pi/4}$; е) $z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$; ж) $z^n\,\mathrm{e}^{\frac{a}{z}}$; з) $\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^{2n+1}}$;

и) $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$; к) $\dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$; л) $\dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$;

м) $\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)},\ a\neq 0,\ n=1,2,\ldots$; н) $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$;

о) $\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$; п) $\dfrac{1+z^8}{z^4(z^4+1)}\cos z\,\mathrm{ch}\,z$; р) $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

11. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных и.о.т:

а) $\dfrac{1}{z+z^3}$; б) $\dfrac{z^2}{1+z^4}$; в) $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$; г) $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$;

д) $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}$; е) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n},\ n=1,2,\ldots$; ж) $\dfrac{1}{\sin \pi z}$;

з) $\operatorname{ctg} \pi z$; и) $\operatorname{th} z$; к) $\operatorname{cth}^2 \pi z$; л) $\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$;

м) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z+1}$; н) $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$; о) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

12. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

а) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$; б) $\cos\left(\pi \dfrac{z+2}{2z}\right)$; в) $\dfrac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}$;

г) $\dfrac{\cos^2 \frac{\pi}{z}}{z+1}$; д) $\dfrac{\left(z^{10}+1\right)\cos\frac{1}{z}}{\left(z^5+2\right)\left(z^6-1\right)}$; е) $z\cos^2\dfrac{\pi}{2}$.

15.Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4},\ D:\ |z-1|<1$;

б) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)},\ D:\ |z-1-i|<2$;

в) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3}\,dz,\ D:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$;

г) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2(z-3)^2},\ D:\ 2<|z|<4$;

д) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z}{z+3}\,e^{\frac{1}{3z}}\,dz,\ D:\ |z|>4$;

е) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3\left(z^{10}-2\right)},\ D:\ |z|<2$;

ж) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}\,dz,\ D:\ |z|<3$;

з) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1}\,dz,\ D:\ |z|<2$;

и) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^3}{z+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,dz,\ D:\ |z|<2$;

к) $\displaystyle\int_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1}\,dz,\ D:\ |z|>3$;

л) $\displaystyle\int_{\partial D} z\sin\frac{z+1}{z-1}\,dz,\ D:\ |z|<2$;

м) $\displaystyle\int_{\partial D} \sin\frac{1}{z-1}\,dz,\ D:\ |z-1|>1$;

н) $\displaystyle\int_{\partial D} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}\,\frac{dz}{z},\ D:\ |z-2|+|z+2|<6$;

о) $\displaystyle\int_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}\,dz,\ D:\ |z|<2$;

п) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\sin z\,dz}{\left(z^3-z\right)(z-i)}\,dz,\ D:\ |z-1|<1$;

р) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\,dz,\ D:\ |z-1|>1$;

с) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\mathrm{e}^{\pi \text{я}}}{2z^2-i}\,dz,\ D:\ |z|<1,\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0$;

т) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z\,dz}{\mathrm{e}^{z^2}-1}\,dz,\ D:\ |z|>4$;

у) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^3\,dz}{\mathrm{e}^{z^2}-1}\,dz,\ D:\ |z|<4$;

ф) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^2\,dz}{\mathrm{e}^{2\pi i z^3}-1}\,dz,\ D:\ \sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Контрольная работа №6

1. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi \, d\varphi}{1-2a\cos\varphi + a^2}, \; -1 < a < 1, \; n \in \mathbf{N}$;

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi \, d\varphi}{1-2a\cos\varphi + a^2}, \; -1 < a < 1, \; n \in \mathbf{N}$;

в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2\cos\varphi)^n \cos n\varphi}{5+4\cos\varphi} d\varphi, \; n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

2. Вычислить несобственные интегралы и главные значения интегралов (задачи на применение леммы Жордана):

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x \, dx}{x^2 + 2x + 10}$; в) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px \, dx}{1+x^3}, \; p \in \mathbf{R}$.

3. Вычислить несобственные интегралы и главные значения интегралов от рациональных функций:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(ax^2+b)^4}, \; a>0, \; b>0$; б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^2)^2}, \; a>0$; в) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$.

2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
ПК-1.1 Формулирует проблемы и определяет направление их решения на основе базовых знаний математики, естественных наук, программирования и информационных технологий ПК-1.2 С помощью стандартных методов решает типовые задачи в области математики, естествознания и информатики ПК-1.3 Применяет методы и приемы из области математики, физики и информатики для решения задач профессиональной деятельности	1. Расскажите о вычислении интегралов по границе области при помощи вычетов. Вычислите интеграл. 2. Расскажите о приложении вычетов к вычислению интегралов от вещественных функций, в частности, к вычислению несобственных интегралов. Найдите интеграл 3. Докажите теорему об интегралах от рациональных функций.	• *Имеется полный анализ задачи, предложен верный алгоритм решения задачи, выделены основные этапы и теоретические основы решения, приведено полное верное решение задачи, включающее правильный ответ – 18 – 20 баллов* • *Имеется полный анализ задачи, предложен верный алгоритм решения задачи и оценка основных этапов решения, приведено решение задачи, но получен неправильный ответ из-за арифметичес-кой / решение недостаточно обосновано / в решении имеются лишние или невер-ные записи, не отделенные от решения – 12 – 17 балла* • *Неполный анализ задачи, предложен верный алго-*

		ритм решения задачи, но имеется верное решение лишь части задачи из-за логической ошибки – 6 - 11 баллов • *Не соответствует требованиям, изложенным выше – 0 - 5 баллов*

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

1. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник. - Москва: Лань, 2009. - 432 с. – Электронный ресурс. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322

б) Дополнительная литература:

1. Теория функций комплексного переменного: учебник / Е. С. Половинкин. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 254 с.– Электронный ресурс. – Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=487040

2) Программное обеспечение

а) Лицензионное программное обеспечение

MS Office 365 pro plus;

MS Windows 10 Enterprise;

MATLAB R2012b Пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений;

Mathcad 15 M010 Система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

б) Свободно распространяемое программное обеспечение

Google Chrome;

MiKTeX 2.9 Открытый дистрибутив TeX для платформы Windows.

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. www.math.ru – сайт посвящён Математике и математикам. Этот сайт для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой

2. http://www.edu.ru/ – Федеральный портал «Российское образование»

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. www.exponenta.ru – образовательный математический сайт

2. www.matematicus.ru – учебный материал по различным математическим курсам

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Темы курсовых работ

1. Система комплексных чисел: координатная, алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

2. Формулы Эйлера и Муавра.

3. Модуль и аргумент, радикал и логарифм комплексного числа.

4. Тождества и неравенства для комплексных чисел, их векторная интерпретация.

5. Евклидова метрика и элементы евклидовой топологии на C.

6. Формулы стереографической проекции.

7. Формула для сферического расстояния. Элементы сферической топологии на $\overline{\mathbf{C}}$.

8. Сходимости в евклидовой метрике и сферической метрике.

9. Кольцо непрерывных функций в точке и на множестве.

10. Моногенность и голоморфность ф.к.п.

11. Формальные производные и условия Коши–Римана.

12. Целое линейное преобразование.

13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной от голоморфной функции.

14. Конформные отображения первого и второго рода.

15. Голоморфность и конформность в расширенной комплексной плоскости. Однолистность и конформность мёбиусовых преобразований в C.

16. Круговое свойство преобразований Мёбиуса.

17. Группа Mob$\overline{\mathbf{C}}$ и её подгруппы.

18. Свойства преобразований симметрия точек относительно окружности на $\overline{\mathbf{C}}$.

19. Существование мёбиусова автоморфизма римановой сферы, нормированного соответствием трёх пар точек.

20. Вычисление групп мёбиусовых автоморфизмов круга и полуплоскости.

Типовые вопросы и задачи для проверки самостоятельной работы

1. Дать определение модуля, аргумента комплексного числа.

2. Дать определение алгебраического корня из комплексного числа
3. Дать определение открытого и замкнутого множеств, предельных и граничных точек, границы, замыкания, связности множества, области, компакта, континуума.
4. Дать определение непрерывности ф.к.п. в евклидовой и сферической метриках.
5. Дать определение моногенной и голоморфной функции.
6. Сформулировать условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах.
7. Сформулировать геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.
8. Сформулировать теорему Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений.
9. Сформулировать интегральную теорему Коши-Гурса.
10. Сформулировать интегральную формулу Коши.
11. Сформулировать теорему Морера.
12. Привести формулы Коши для производных голоморфной функции.
13. Сформулировать теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Сформулировать теорему Абеля о степенных рядах.
15. Сформулировать теорему о представлении голоморфной функции степенным рядом.
16. Привести разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора.
17. Сформулировать теорему Лиувилля.
18. Сформулировать теорему Лорана.
19. Привести неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
20. Сформулировать внутреннюю теорему единственности.
21. Дать определение изолированной особой точки голоморфной функции, привести их классификацию.
22. Сформулировать критерии у.о.т. и полюса.
23. Сформулировать критерий с.о.т.
24. Дать определение вычета в и.о.т. и привести формулы для вычисления вычетов.
25. Сформулировать теорему Коши о вычетах.
26. Сформулировать теорему о сумме всех вычетов.

Вопросы к экзамену

1. Поле комплексных чисел. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Геометрические свойства комплексных чисел.
2. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость. Сходящиеся последовательности в $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Евклидова и сферическая метрики. Топологии в $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).
4. Функции комплексного переменного (ф.к.п.). Непрерывность, ограниченность ф.к.п. Теоремы о непрерывных ф.к.п. на компакте, в области.
5. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах. Критерии моногенности и голоморфности ф.к.п. в точке. Связь голоморфных и гармонических функций.
6. Аффинные преобразования. Целые линейные преобразования. Декомпозиция целой линейной функции, её свойства.
7. Касательное отображение. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определения конформного отображения 1-го и 2-го рода. Якобиан конформного отображения. Примеры.
8. Криволинейные интегралы от ф.к.п., их свойства, вычисление. Примеры вычисления интегралов от ф.к.п.
9. Интегральная теорема Коши-Гурса и её обобщение на многосвязные области (с доказательствами).
10. Интегральная формула Коши. Доказательство, обобщение на случай многосвязных областей, следствия.
11. Неопределённый интеграл от ф.к.п. в плоской области и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.

12. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.
13. Поточечная, равномерная, локально-равномерная сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Теорема Абеля о степенных рядах. Существование радиуса сходимости и методы его вычисления. Формула Коши-Адамара. Локально-равномерная сходимость, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.
15. Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.
16. Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.
17. Ряды Лорана, структура области сходимости. Доказательство теоремы Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
18. Внутренняя теорема единственности (доказательство). Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.
19. Изолированные особые точки голоморфной функции, их классификация. Критерии у.о.т. и полюса. Нахождение порядка полюса. Примеры.
20. Критерий с.о.т. Бесконечность как и.о.т. голоморфной функции. Классификация и критерии и.о.т. на бесконечности.
21. Определение вычета в и.о.т. и формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.

22. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Лемма Жордана и её применения.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление глоссария. В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

5. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

6. Подготовка к экзамену. При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая опенка (балл) по каждому модулю (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы обучающихся на занятиях семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы и иные аналогичные занятия), оценки индивидуальной работы обучающихся и оценки за выполнение заданий рейтингового контроля успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60.

Обучающемуся, набравшему 40-54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55-57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58-60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично».

В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен. При наличии подтвержденных документально уважительных причин, по которым были пропущены занятия (длительная болезнь, обучение в другом вузе в рамках академической мобильности и др.), обучающийся имеет право отработать пропущенные занятия и получить дополнительные баллы в рамках установленных баллов за модуль. Сроки и порядок отработки определяет преподаватель. Баллы выставляются в графе «отработка».

Ответ обучающегося на экзамене оценивается суммой до 40 рейтинговых баллов. Итоговая оценка складывается из суммы баллов, полученных за семестр, и баллов, полученных на экзамене. Обучающемуся, который сдает экзамен, премиальные баллы не начисляются.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.
- Сроки проведения рейтингового контроля:

осенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

весенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория: 224 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2) Проектор Casio XJ-M140, настенный проекц. Экран	Microsoft Office профессиональный плюс 2013 – Акт приема передачи № 689 от 05.07.2019 г.; Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема передачи №689 от 05.07.2019 г.;

	Lumien 180*180, ноутбук Dell N4050, сумка 15,6", мышь. Меловая доска, комплект учебной мебели.	Google Chrome – бесплатное ПО; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №969 18.10.2018 г.

VIII. Перечень обновлений рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.			
2.			