Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП
Н.А. Семыкина
____
«4» 09 2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Математический анализ

Специальность

10.05.01 КОМПЬЮТЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

Специализация «Математические методы защиты информации»

Для студентов 1, 2 курсов
Форма обучения очная

Составитель:
к.ф.-м.н., доцент А.А. Голубев

Тверь 2023

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются изучение основных понятий указанной дисциплины необходимых для освоения ООП и последующей профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование знаний о математике, как особом способе познания мира и образе мышления, общности её понятий и представлений;
- выработка умений и навыков решения математически формализованных задач;
- формирование теоретических знаний по математическому анализу (основные понятия, определения, теоремы и факты) необходимых для изучения последующих математических и специальных дисциплин, а также решения экономических и прикладных задач

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 учебного плана – к дисциплинам, формирующим универсальные и общепрофессиональные компетенции.

Математический анализ имеет логические и содержательно-методические взаимосвязи со всеми математическими и естественнонаучными дисциплинами и необходим для изучения этих дисциплин.

Для освоения дисциплины необходимы устойчивое знание школьного курса математики и наличие устойчивых навыков работы с объектами элементарной математики.

Дисциплина изучается на 1, 2 курсах.

3. Объем дисциплины: 21 зачетные единицы, 756 академических часов, **в том числе:**
контактная аудиторная работа: лекции 193 часа, практические занятия 193 часа;
самостоятельная работа: 262 часа, в том числе курсовая работа 10 часов (4-й семестр), контроль 108 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности	ОПК-3.10 Применяет основные методы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных ОПК-3.11 Решает задачи теории функций комплексного переменного

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения
экзамены (1 – 4 семестры).

6. Язык преподавания: русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа				Самостоятельная работа, в том числе контроль (час.)
		Лекции	*в т.ч. практическая подготовка*	Практические занятия	*в т.ч. практическая подготовка*	
Раздел 1 Действительные числа	**36**	**10**	**0**	**10**	**0**	**16**
Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.	18	4	0	6	0	8
Грани числовых множеств. Теоремы о существовании граней. Свойства граней. Признаки граней. Принцип Кантора.	18	6	0	4	0	8
Раздел 2 Функции	**60**	**8**	**0**	**8**	**0**	**44**
Понятие функции. Общие свойства функций. Образ и прообраз множества при отображении. Классификация функций (инъективные, сюръективные, биективные отображения). Композиция функций. Обратная функция. Условия существования обратной.	22	4	0	4	0	14
Числовые функции. Ограниченные, монотонные, периодические, четные и нечетные функции. Неявное	22	2	0	2	0	18

задание функции. Параметрическое задание функции.						
Элементарные функции. Свойства базисных элементарных функций. Классификация элементарных функций.	16	2	0	2	0	12
Раздел 3 Предел числовой последовательности	**28**	**8**	**0**	**8**	**0**	**12**
Предел числовой последовательности. Основные свойства: Сходимость и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Бесконечные пределы.	14	4	0	4	0	6
Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Число “e”. Суще-ствование монотонной подпоследо-вательности. Принцип Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши.	14	4	0	4	0	6
Раздел 4 Непрерывность числовой функции	**48**	**14**	**0**	**14**	**0**	**20**
Предельные точки множества. Понятие предела функции в точке. Локальная ограниченность функции, имеющей предел в точке. Бесконечно малые функции. O – символика. Предел и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.	12	4	0	4	0	4

1-й и 2-й замечательные пределы. Другие эталонные пределы.	12	2	0	4	0	6
Понятие непрерывности функции в точке. Непрерывность и арифметические операции. Непрерывность композиции. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функции, заданной параметрически. Понятие кривой.	12	4	0	2	0	6
Непрерывность и ограниченность. Теорема Вейерштрасса.	6	2	0	2	0	2
Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность и монотонность. Непрерывность обратной функции.	6	2	0	2	0	2
Раздел 5 Дифференциальное исчисление функций одной переменной	**44**	**11**	**0**	**11**	**0**	**22**
Понятие дифференцируемости функции в точке. Эквивалентные определения. Производная. Дифференциал. Геометрический смысл производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонняя дифференцируемость. Дифференцируемость функции, заданной параметрически. Гладкие кривые. Дифференцируемость элементарных функций.	8	2	0	2	0	4

Дифференцируемость композиции. Дифференцируемость и арифметические операции. Дифференцируемость обратной функции.	8	2	0	2	0	4
Экстремум одномерной функции. Необходимые условия. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теоремы о конечных приращениях. Условия монотонности одномерной функции. Достаточные условия экстремума в терминах первой производной.	8	2	0	2	0	4
Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя	4	1	0	1	0	2
Высшие производные и дифференциалы. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши. Локальная формула Тейлора. Представление формулой Тейлора базисных элементарных функций.	6	2	0	2	0	2
Выпуклые функции. Непрерывность выпуклой функции. Односторонняя дифференцируемость. Выпуклые дифференцируемые функции. Условия выпуклости в терминах производных.	4	1	0	1	0	2
Асимптоты. Применение производной к построению графиков функций.	6	1	0	1	0	4
Всего за 1-й семестр	**216**	**51**		**51**		**114**

Раздел 6 Интегрирование одномерных функций	**110**	**17**	**0**	**30**	**0**	**63**
Разбиения отрезка. Верхние и нижние интегральные суммы	6	2	0	2	0	2

(суммы Дарбу). Верхний и нижний интеграл. Понятие интеграла Римана. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.						
Основные свойства интеграла Римана: линейность, монотонность, аддитивность. Оценка модуля интеграла.	10	2	0	2	0	6
Понятие первообразной. Существование первообразной. Формула Ньютона-Лейбница	10	2	0	2	0	6
Неопределенный интеграл. Основные свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.	22	2	0	10	0	10
Техника неопределенного интегрирования. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций.	24	2	0	6	0	16
Теоремы о среднем значении для интеграла Римана	10	2	0	2	0	6
Несобственные интегралы по бесконечному промежутку и от неограниченной функции. Основные свойства. Вычисление. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле. Интегралы с несколькими особенностями.	16	2	0	4	0	10
Геометрические и физические приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Спрямляемые кривые. Длина кривой.	12	3	0	2	0	7

Раздел 7 Числовые ряды	**46**	**18**	**0**	**8**	**0**	**20**
Понятие числового ряда. Общий член. Частные суммы. Сходимость числового ряда. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Остаток ряда. Критерий Коши. Абсолютная сходимость.	10	4	0	2	0	4
Ряды с положительными членами. Признаки сходимости: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши. Признаки Куммера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак.	14	6	0	2	0	6
Ряды с произвольными членами. Признаки сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле.	10	4	0	2	0	4
Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.	12	4	0	2	0	6
Раздел 8 Функциональные и степенные ряды. Ряды Фурье	**54**	**16**	**0**	**13**	**0**	**25**
Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши. Непрерывность предельной функции. Предельный переход под знаком интеграла. Сходимость последовательности производных.	8	2	0	2	0	4
Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.	10	2	0	2	0	6

Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.						
Степенные ряды. Теорема Коши - Адамара. Радиус, интервал и область сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.	10	2	0	2	0	6
Ряд Тейлора. Условия сходимости. Разложение в степенной ряд базисных элементарных функций.	7	3	0	2	0	2
Ряды Фурье.	19	7	0	5	0	7
Всего за 2-й семестр	**210**	**51**	**0**	**51**	**0**	**108**

Раздел 9 Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных	**62**	**12**	**0**	**12**	**0**	**38**
Пространство R^n. Канонический базис. Скалярное произведение. Норма в R^n. Покоординатная сходимость последовательности элементов R^n. Компактные множества в R^n. Линейные операторы в R^n. Обратимые линейные операторы. Условия обратимости Функции многих переменных. Примеры. График. Линии уровня. Представление функции $f : R^m \to R^n$ координатными функциями. Предел и непрерывность функций многих переменных. Повторные пределы. Пределы по направлению. Непрерывность по	18	4	0	4	0	10

фиксированной переменной. Теорема Вейерштрасса.						
Понятие дифференцируемой функции $f : R^m \to R^n$. Градиент. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Частные производные. Структура градиента. Дифференцируемость функции в случае непрерывности частных производных. Дифференцируемость сложной функции. Дифференцируемость и арифметические операции. Геометрический смысл градиента. Касательная плоскость и нормаль. Производная по направлению	24	4	0	4	0	16
Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных. Формулы для вычисления дифференциалов высших порядков. Формула Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа.	20	4	0	4	0	12
Раздел 10 **Кратные интегралы**	**72**	**14**	**0**	**14**	**0**	**44**
Внешняя и внутренняя мера множества на плоскости. Измеримые по Жордану множества. Мера Жордана. Критерии измеримости. Монотонность и конечная аддитивность меры. Множества меры нуль. Мера Жордана в пространствах R^2 и R^3.	40	8	0	8	0	24

Двойные интегралы. Линейность, монотонность и конечная аддитивность двойного интеграла. Вычисление двойных интегралов сведением к повторным. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам. Тройные интегралы и интегралы высшей кратности. Приложения кратных интегралов.	32	6	0	6	0	20
Раздел 11 **Криволинейные интегралы**	**46**	**8**	**0**	**8**	**0**	**30**
Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление сведением к определенному интегралу. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.	24	4	0	4	0	16
Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Приложения криволинейных интегралов.	22	4	0	4	0	14
Всего за 3-й семестр	**180**	**34**	**0**	**34**	**0**	**112**

Раздел 12 **Поле комплексных чисел**	**22**	**4**	**0**	**4**	**0**	**14**
Поле комплексных чисел, аксиоматика множества комплексных чисел.	4	1	0	1	0	2
Модуль и аргумент комплексного числа. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и	6	1	0	1	0	4

показательное представления комплексного числа. Степень и радикал, формула Муавра.						
C как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в **C** и $\overline{\mathbb{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса. Полнота и компактность расширенной комплексной плоскости.	8	2	0	2	0	4
Топологии в **C** и $\overline{\mathbb{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).	4	0	0	0	0	4
Раздел 13 Функции комплексного переменного	**30**	**6**	**0**	**6**	**0**	**18**
Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, континууме, в области.	10	2	0	2	0	6
Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного анализа. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Формальные производные.	12	2	0	2	0	8

Критерий моногенности и ф.к.п. в точке, условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.						
Касательное отображение и якобиан дифференцируемого отображения. Локальное поведение дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом. Локальное поведение голоморфного отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определение конформного отображения в точке и области. Достаточные условия конформности отображения. Основные принципы теории конформных отображений, теорема Римана о конформных отображениях.	8	2	0	2	0	4
Раздел 14 Интегралы от функций комплексного переменного	**26**	**10**	**0**	**4**	**0**	**12**
Криволинейные интегралы в ТФКП. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла.	5	2	0	1	0	2
Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.	7	2	0	1	0	4
Интегральная формула Коши.	5	2	0	1	0	2
Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.	4	2	0	0	0	2
Первообразная от ф.к.п. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.	5	2	0	1	0	2

Раздел 15 **Ряды Тейлора и Лорана**	**38**	**8**	**0**	**10**	**0**	**20**
Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.	9	2	0	2	0	5
Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Действия со степенными рядами, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.	9	2	0	2	0	5
Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.	8	2	0	2	0	4
Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.	4	2	0	2	0	0
Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы. Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций.	8	0	0	2	0	6

Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.						
Раздел 16 Изолированные особые точки и вычеты	**70**	**26**	**0**	**30**	**0**	**14**
Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности.	25	10	0	10	0	5
Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Примеры. Вычисление вычета на бесконечности. Примеры. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.	23	8	0	10	0	5
Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительнозначных функций. Примеры.	22	8	0	10	0	4
Курсовая работа	**10**					**10**
Всего за 4-й семестр	**216**	**54**	**0**	**54**	**0**	**108**

III. Образовательные технологии

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

Образовательные технологии

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

Современные методы обучения

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации (по математическому анализу, 1–3 семестры)

Темы рефератов

1. Свойства верхних и нижних граней множеств.
2. Топологические свойства множеств на числовой прямой.
3. Образы и прообразы множеств при отображениях.
4. Методы отыскания обратных функций.
5. Четные и нечетные функции.
6. Периодические функции.
7. Функции, заданные параметрически.
8. Функции, заданные неявно.
9. Ограниченные функции.
10. Вычисление пределов последовательностей с помощью теоремы о пределе промежуточной последовательности.
11. Вычисление пределов последовательностей с помощью теорем Теплица и Штольца.
12. Специальные приемы вычисления пределов последовательностей.
13. Контрпримеры, связанные с понятием предела последовательности.
14. Верхний и нижний предел последовательности.
15. Вычисление сумм рядов.
16. Перестановка и группировка членов ряда.
17. Умножение рядов.
18. Предельные точки множества.
19. Специальные приемы вычисления пределов функций.
20. $O-$символика.
21. Использование $O-$символики при вычислении пределов функций.

22. Контрпримеры, связанные с понятием предела функции.
23. Верхний и нижний предел функции.
24. Пределы монотонных функций.
25. Эталонные пределы.
26. Контрпримеры, связанные с понятием предела функции.
27. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.
28. Теоремы об обращении непрерывной функции в нуль и о промежуточных значениях непрерывной функции. Решение уравнений.
29. Непрерывность обратной функции.
30. Контрпримеры, связанные с понятием непрерывности функции.
31. Гиперболические функции.
32. Основные элементарные функции, как гомоморфизмы групп.
33. Доказательство дифференцируемости функций по определению.
34. Геометрический смысл производной.
35. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
36. Контрпримеры, связанные с понятием дифференцируемости функции.
37. Основные теоремы дифференциального исчисления.
38. Экстремум функции.
39. Практические задачи на отыскание экстремальных значений функций.
40. Экстремумы в геометрических задачах.
41. Исторические задачи на экстремум.
42. Доказательство неравенств с использованием свойств монотонности и экстремальных значений функции.
43. Формула Тейлора и приближенные вычисления.
44. Применение формулы Тейлора к отысканию пределов функций.
45. Выпуклые и вогнутые функции.
46. Экстремумы выпуклых и вогнутых функций.
47. Доказательство неравенств с использованием понятий выпуклости и вогнутости функций.
48. Отыскание асимптот.
49. Нелинейные асимптоты.
50. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
51. Дифференцирование неявно заданных функций.
52. Первообразные разрывных функций.
53. Специальные приемы вычисления неопределенных интегралов.
54. Контрпримеры в теории интеграла Римана.
55. Специальные приемы вычисления определенных интегралов.
56. Вычисление интеграла Римана–Стильтьеса.
57. Теоремы о среднем значении для интеграла.
58. Отыскание площадей плоских фигур и площадей поверхностей вращения с помощью интеграла.
59. Отыскание объемов с помощью интеграла.
60. Решение физических задач с помощью интеграла.
61. Вычисление некоторых несобственных интегралов.
62. Признаки сходимости несобственных интегралов.

63. Абсолютная сходимость несобственных интегралов.
64. Тонкие признаки сходимости положительных числовых рядов.
65. Абсолютная сходимость числовых рядов.
66. Некоторые приемы отыскания сумм числовых рядов.
67. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
68. Отыскание области сходимости функциональных рядов.
69. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
70. Дифференцирование функциональных рядов.
71. Интегрирование функциональных рядов.
72. Контрпримеры в теории функциональных рядов.
73. Область сходимости степенного ряда.
74. Разложение функций в степенные ряды.
75. Приближенные вычисления с помощью функциональных рядов.
76. Экспонента и логарифм, как сумма ряда.
77. Тригонометрические и гиперболические функции, как суммы функциональных рядов.
78. Топологические свойства множеств в многомерном пространстве.
79. Предел функции многих переменных. Повторные пределы. Предел по направлению. Предел по кривой. Контрпримеры, связанные с понятием предела функции.
80. Непрерывность функций многих переменных. Непрерывность по фиксированной переменной. Непрерывность по подпространству. Контрпримеры, связанные с понятием непрерывности.
81. Геометрическая интерпретация дифференцируемости для многомерной функции. Касательная плоскость и нормаль.
82. Частные производные и дифференциалы высших порядков многомерных функций. Контрпримеры, связанные с понятием дифференцируемости.
83. Экстремум многомерной функции.
84. Условный экстремум.
85. Мера Жордана.
86. Множества Лебеговой меры нуль.
87. Некоторые приемы вычисления двойных и тройных интегралов.
88. Многомерные интегралы.
89. Несобственные кратные интегралы.
90. Приложения кратных интегралов.
91. Некоторые приемы вычисления криволинейных интегралов интегралов.
92. Формула Грина.
93. Вторая формула Грина.
94. Приложения криволинейных интегралов.

Контрольные вопросы и задания

Введение в анализ

1. Приведите определение верхней грани множества.
2. Приведите пример множества, имеющего верхнюю грань и не

имеющего наименьшего элемента.

3. Найдите верхние и нижние грани множеств.

   3.1. $\{0,1;\ 0,011;\ 0,00111,\ \dots\}$ 3.2. $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\ :\ n \in N\right\}$

4. Приведите пример множества имеющего верхнюю грань и не имеющего наименьшего элемента
5. Приведите определение функции.
6. Среди кривых, приведенных на рисунках, выберите те, которые являются графиками функций.
7. Приведите пример предела последовательности.
8. Приведите примеры последовательностей, имеющих конечный предел, имеющих бесконечный предел, не имеющих предела.
9. Приведите определение предела функции в точке.
10. Приведите примеры функций, имеющих конечный предел, имеющих бесконечный предел, не имеющих предела в заданной точке.
11. Приведите определение непрерывной функции.
12. Приведите примеры разрывных функций, имеющих точки разрыва различных типов.

Дифференцирование одномерных функций. Экстремум одномерной функции. Интегрирование одномерных функций.

1. Приведите определение дифференцируемости функции в точке и производной функции в точке.
2. Укажите связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Приведите необходимые примеры.
3. Определите, является ли функции $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sign} x$ и $f(x) = x \cdot \operatorname{sign} x$ дифференцируемыми в точке $x = 0$.
4. Найдите производные функции

   4.1. $f(x) = \cos^2\left(12x + \frac{\pi}{12}\right)$ 4.2. $f(x) = e^{2(x+1)^2}$.

5. Приведите определение точек локального максимума и точек локального минимума функции.
6. Приведите примеры точек локального максимума и точек локального минимума функции. Покажите геометрическую интерпретацию.
7. Приведите примеры функций, не имеющих локальных экстремумов.
8. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
9. Сформулируйте достаточное условие экстремума.
10. Найдите точки экстремума функции f

    10.1. $f(x) = x^2(x-1)$ 10.2. $f(x) = x \cdot |x-1|$ 10.3. $f(x) = |x| e^{-x}$.

11. найдите наибольше и наименьшее значение функции f на промежутке Δ

    11.1. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^4 - 1,\ \ \Delta = [-1;\ 1]$ 11.2.

$f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad \Delta = [-1; 1]$

12. Сформулируйте определение интеграла Римана по отрезку.
13. Укажите классы интегрируемых функций.
14. Приведите пример неинтегрируемой функции.
15. Сформулируйте определение первообразной функции.
16. Найдите первообразную F для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$, такую, что $F(0) = 0$.
17. Приведите формулу разложения Рациональной дроби на элементарные.
18. Найдите неопределенные интегралы.

 18.1. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ 18.2. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ 18.3. $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

19. Найдите определенные интегралы.

 19.1. $\int_1^2 \frac{\lg x}{x^2} dx$ 19.2. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ 19.3. $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$

20. Приведите определения числового ряда, сходящегося числового ряда. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов.
21. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда. Является ли необходимое условие сходимости достаточным. Приведите примеры.
22. Сформулируйте достаточные признаки сходимости положительных рядов. Являются ли достаточные условия сходимости необходимыми.
23. Сформулируйте определения абсолютно сходящегося числового ряда, условно сходящегося числового ряда. Приведите примеры.
24. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с произвольными членами. Приведите примеры, показывающие, что все условия теорем являются существенными.
25. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости.
26. Сформулируйте определение знакочередующегося сходящегося числового ряда, признаки сходимости. Приведите примеры, показывающие, что все условия теорем являются существенными.
27. Сформулируйте определение функциональной последовательности, определения поточечной сходимости, области сходимости, предельной функции.
28. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной последовательности.
29. Сформулируйте достаточные условия непрерывности предельной функции. Являются ли достаточные условия необходимыми? Может ли последовательность непрерывных функций сходиться равномерно к разрывной функции.
30. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости предельной функции. Являются ли достаточные условия необходимыми?
31. Сформулируйте определение функционального ряда, определения поточечной сходимости, области сходимости, суммы ряда.

32. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной ряда.
33. Сформулируйте достаточные условия непрерывности суммы ряда. Являются ли достаточные условия необходимыми?
34. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости суммы ряда. Являются ли достаточные условия необходимыми?
35. Сформулируйте определение степенного ряда, опишите структуру области сходимости, характер сходимости.
36. Приведите способы отыскания радиуса сходимости степенного ряда.
37. Сформулируйте определения рядов Тейлора, Маклорена.
38. Сформулируйте достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.
39. Получите разложения в степенной ряд основных элементарных функций, укажите области сходимости полученных рядов.

Задачи на практических занятиях

Дифференцирование одномерных функций. Экстремум одномерной функции

1. Определите, будет ли функция $f(x)=\sqrt{|x|}\cdot\sin\sqrt{|x|}$ дифференцируема в точке $x=0$.

2. Найдите производную функции $f(x)=\sin^2 2\left(x^2+\dfrac{x\cdot e^{\sqrt{x}}}{ar\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\right)$.

3. Найдите касательные функции $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, в неподвижных точках этой функции.

4. Определите, сколько раз функция $f(x)=(x-|x|)\cdot x^2$ дифференцируема в точке $x=0$.

5. Пусть $f(x)=x\cdot\sin\pi x$. Докажите, что для любого числа M найдется точка $x_0>M$, такая, что $f'(x_0)=0$.

6. Найдите пределы 6.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(e^{x-1}-\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln x-x+1}$. 6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin^2 x}{\ln(1+x)-x^2}$

7. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x)=|x-1|e^{-|x-1|}$.

8. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ на отрезке $[2;4]$.

9. Найдите равнобедренный треугольник наибольшей площади, вписанный в окружность заданного радиуса

10. Докажите неравенство $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$, $x>1$. Приведите геометрическую иллюстрацию.

11. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функции $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

12. Найдите вторую производную функции $f(x)=x^3+\operatorname{arctg}x$.

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

1. Найдите интегралы.

1.1. $\int (x-1)(2x+3)^{12}dx$ 1.2. $\int \frac{(x^2-2x+2)\ln(x+1)+2x}{x^2-2x+2}dx$.

1.3. $\int \frac{2x^3-2x^2+4x}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}dx$. 1.4. $\int x\cdot \sin 3x\,dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$. 1.6. $\int \frac{e^{2x+1}}{\sqrt{1+e^x}}dx$. 1.7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

1.7. $\int\limits_{-3}^{1} x\sqrt{\frac{3+x}{2}}dx$. 1.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x-\cos x}{\sin x+\cos^2 x}dx$

1.9. $\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+e^{\frac{x}{10}}-\sin\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)dx$ 1.10. $\int\limits_{0}^{0,5}(2x-1)\cdot e^{4x^2-4x+1}dx$

1.11. $\int\limits_{1}^{e}\ln 2x\cdot dx$ 1.12. $\int\limits_{-1}^{0}x^3\sqrt{1-x^2}dx$

Несобственный интеграл. Приложения интеграла

1. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=\sin 2x$ и $y=\frac{4}{\pi}x$
2. Найдите длину кривой $x=2t^2,\quad y=\frac{4}{3}t^3,\quad t\in[0;2]$
3. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл.

3.1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln\frac{x^2+1}{x^2}dx$. 3.2. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos \pi x}{\sqrt{x}}dx$. 3.3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt[6]{x^3+x^4}}{x}dx$.

Числовые ряды

1. Исследуйте на сходимость ряд

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$ 1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5+3}}$ 1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}$ 1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+3^n}$

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{n^2-1}{\sqrt{n^4+1}}\right)$. 1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$. 1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{\pi}{2n}$.

Функциональные и степенные ряды

1. Исследуйте функциональную последовательность $\{f_n\}$ на сходимость и равномерную сходимость на множестве A.

1.1. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$, $A=[0;1]$. 1.2. $f_n(x)=\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$, $A=(0;+\infty)$.

2. Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд на множестве A.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $A=(0;+\infty)$. 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)}$, $A=(0;+\infty)$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg}x}{n+x^2}$, $A=(-\infty;+\infty)$. 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\cos nx$, $A=[0;\pi]$.

3. Найдите радиус интервал и область сходимости степенного ряда.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$. 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)}x^n$.

4. Функцию f разложите в ряд Маклорена и найдите область сходимости этого ряда.

4.1. $f(x)=e^{-x^2}$. 4.2. $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$. 4.3. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

5. Найдите сумму ряда

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных

1. Найдите $\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=\begin{cases} z\cdot\sin\frac{1}{z}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$

2. Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=x^{x\cdot\ln yz}$

3. Найдите $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=e^{xyz}\cdot\cos x$

4. Найдите $df\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ и $d^2f\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ для функции $f(x,y,z)=z\cdot\sin xy+\frac{1}{y}\cdot\cos xz$

5. Найдите касательную плоскость к функции $f(x,y)=1+x^2-y^2$, параллельную плоскости $p(x,y)=1-x+y$

6. Найдите точки локального экстремума функции

6.1 $f(x,y,z)=xy^2(1-x-y-z)$ 6.2 $f(x,y)=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$

7. Найдите точки условного экстремума функции f, при заданных ограничениях.

7.1. $f(x,y,z)=xy^2$, $x+y=z$

7.2. $f(x,y,z)=xy+z$, $x^2+y^2=2$, $x+y+z=3$.

Двойные и тройные интегралы, их приложения

1. Найдите двойной интеграл по области *G,* ограниченной указанными линиями

1.1. $\iint\limits_G\cos(x-y)dxdy,\ x=y,\ x=0,\ y=\pi$

1.2. $\iint\limits_G xydxdy, \quad x = y, \; x = 1, \; y = 0$

1.3 $\iint\limits_G e^{2x-y}dxdy, \quad 2x = y, \; 2x = y+1, \; y = 0, \; y = 1$

1.4. $\iint\limits_G \frac{2y}{x}dxdy, \quad x^2 = y, \; 2x = y, \; x = 1, \; x = 2$

2. Найдите тройной интеграл по области G, ограниченной указанными поверхностями

2.1. $\iiint\limits_G xdxdydz, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 1, x + y + z = 2$

2.2. $\iiint\limits_G \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2}dxdydz, \; x = \frac{1}{2}, y = 0, \; z = 0, \; x^2 + y^2 = 1, \; z = x^2 + y^2$

2.3. $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz, \; x = 0, \; z = 0, z = 1, \; x^2 + y^2 = 1, \; (x \geq 0)$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

3.1. $4y = x^2 - 4x, \quad x = y + 3$

3.2.. $x = 2y, \quad y = 3x, \quad 3x = 2 - y, \quad x = 4 - 2y$

4. Найдите объем тела ограниченного поверхностями

4.1. $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0$

Криволинейные интегралы

1. Найдите криволинейные интегралы

1.1. $\int\limits_l (2x + y)ds, \; l = ABOA, \; A = (1,0), \; B = (0,2), \; O = (0,0)$

1.2. $\int\limits_l \sqrt{y}ds, \; l: \; x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t), \; 0 \leq t \leq 2\pi$

1.3. $\int\limits_l ydx - xdy, \; l: \; y = x^3, \; 0 \leq x \leq 2$

1.4. $\int\limits_l (x - y)dx - (x + y)dy, \quad l$ – произвольный путь, соединяющий точки $A = (2,-1), \; B = (1,0)$

2. Используя формулу Грина, найдите интеграл

$$\int\limits_{\partial G} e^x(1 - \cos y)dx - e^x(y - \sin y)dy, \; G = \{(x,y) : x \in [0, \pi], \; 0 \leq y \leq \sin x\}$$

Типовые задачи для текущего контроля
(по теории функций комплексного переменного, 4-й семестр)

Комплексные числа

1. Найти все значения радикала $\sqrt{1+\sqrt[3]{-1}}$.
2. Найти все значения $i^{\sin i}$.
3. Вычислить $\alpha = \mathrm{e}^{\ln 2 + i\pi/2}$ и изобразить точку на плоскости.
4. Вычислить $\mathrm{sh}(\ln 3 + \mathrm{i}\pi)$.
5. Вывести формулы стереографической проекции и формулу для сферического расстояния. Найти сферическое расстояние между точками 1 и ∞, i и $-i$.
6. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках ± 1 и данными полуосями, параболы $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$, отрезка прямой, соединяющей две точки.

Голоморфные функции

7. Является ли функция $w = z\mathrm{e}^{2i\bar{z}}$ голоморфной в начале координат? Доказать голоморфность функций $\sin z$ и $\mathrm{ch} z$ на $\mathbf{C}$.
8. Восстановить голоморфную функцию по заданной ее реальной части $u = x^3 - 3x^2 y + 2x^2 - 2y^2 + \mathrm{e}^x \sin y,\ (x, y) \in \mathbf{C}$.

Конформные отображения

9. Методом слоений найти образы верхнего единичного полукруга при преобразованиях $w = 1/z$, $w = 1/\bar{z}$ и $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.
10. Найти общий вид мебиусовых преобразований верхней полуплоскости на себя, верхней полуплоскости на единичный круг, единичного круга на себя.
11. Какая часть плоскости сжимается при отображении $w = \dfrac{z}{2z-1}$? Какая часть плоскости растягивается при отображении $w = \mathrm{e}^{2iz}$?

Ряды Тейлора и Лорана

12. Найти область сходимости функционального ряда:

$$\text{(а) } \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2\nu}}{3^{\nu}}; \quad \text{(б) } \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^{\nu}(z); \quad \text{(в) } \sum_{\nu=-1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\nu}.$$

13. Найти нули и изолированные особые точки функций:

$$\text{(а) } \frac{z\cos z}{\sin^2 z}; \quad \text{(б) } \frac{\sin^2 z}{\mathrm{e}^z - 1}; \quad \text{(в) } \frac{z^2 - zi}{\mathrm{e}^{1/z} + 1}.$$

Определить порядки нулей и классифицировать и.о.т.

14. Представить рядами Лорана в проколотой окрестности точки $z=a$ следующие функции

$$(\text{а})\ \frac{z}{z^2-3z+2},\ a=1;\quad (\text{б})\ \frac{z^2}{z^3+1},\ a=\infty;$$
$$(\text{в})\ \frac{\sin^2 z}{z},\ a=0;\quad (\text{г})\ \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2},\ a=0.$$

Вычеты и их применение

15. Найти вычеты заданных функций в ее и.о.т., включая точку $z=\infty$:

$$(\text{а})\ \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2};\quad (\text{б})\ \frac{z}{\operatorname{ch} z - 1};$$
$$(\text{с})\ z^3 \sin\frac{\pi}{z};\quad (\text{д})\ \sin z\cdot\sin\frac{1}{z}.$$

16. Вычислить с помощью теоремы о вычетах интегралы:

$$(\text{а})\ \oint\limits_{|z|=4} \frac{z}{z+3}e^{1/3z}\,\mathrm{d}z;\quad (\text{б})\ \oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z\sin z};$$
$$(\text{в})\ \oint\limits_{|z|=2} z\sin\frac{z+1}{z-1}\,\mathrm{d}z;\quad (\text{г})\ \oint\limits_{|z|=1/2} \frac{\mathrm{d}z}{(2+\sqrt{z-1})\sin z},\ \left(\sqrt{z-1}\Big|_{z=0}=i\right).$$

17. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

$$(\text{а})\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x\,\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4};\quad (\text{б})\ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^3\right)},\ 0<a<b;$$
$$(\text{с})\ \mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2-5x+6};\quad (\text{д})\ \mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+4\right)(x-1)}.$$

18. Вычислить интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin\varphi,\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$:

$$(\text{а})\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{5+3\cos\varphi};\quad (\text{б})\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ -1<a<1,\ n\in\mathbf{N};$$
$$(\text{в})\ \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{1-a\sin^2\varphi},\ 0<a<1;\quad (\text{г})\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\ n=0,1,\ldots$$

19. Вычислить несобственные интегралы от рациональных функций:

$$(\text{а})\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)};\quad (\text{б})\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n},\ a>0,\ n\in\mathbf{N};$$
$$(\text{в})\ \mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+1};\quad (\text{г})\ \mathrm{v.p.}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4-1}.$$

Контрольные работы (образцы задач)

Контрольная работа № 1

1. Выполнить арифметические действия над комплексными числами:

а) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^5$; б) $\left(-\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right)^5$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$;

д) $\sqrt[5]{64\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)}$; е) $\sqrt[5]{64\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}$.

2. Изобразить на комплексной плоскости **C** области, заданные системами неравенств:

а) $\begin{cases} |z-3i|<2, \\ |\arg z-\pi/2|<\pi/6, \\ \operatorname{Im} z<4; \end{cases}$; б) $\begin{cases} |z-1+i|<2, \\ |\arg z-\pi/2|<\pi/3, \\ \operatorname{Im} z>-1. \end{cases}$.

3. Выяснить, какие линии на плоскости записаны следующими уравнениями:

а) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=0$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$.

4. Выяснить, какие множества на плоскости заданы следующими неравенствами:

а) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{2}$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}$.

5. Доказать тождества:

а) $\left|z_1\overline{z_2}+1\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$;

б) $\left|z_1\overline{z_2}-1\right|^2-\left|z_1-z_2\right|^2=\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$.

6. Пусть z_1 и z_2 - комплексные числа, а a_1 и a_2 - действительные числа ($a_1^2+a_2^2\neq 0$). Доказать неравенства:

а) $2\dfrac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}\geq |z_1|^2+|z_2|^2-\left|z_1^2+z_2^2\right|$;

б) $2\dfrac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}\leq |z_1|^2+|z_2|^2+\left|z_1^2+z_2^2\right|$.

У к а з а н и е. Ввести вспомогательный угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=a_1/a_2$, представить левую часть доказываемого неравенства в виде $A+B\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$ и найти её соответственно наименьшее и наибольшее значения.

7. Доказать формулы:

а) $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, $x\neq \pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

а) $\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$, $x\neq \pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

8. Решить уравнения:

а) $\sin z=\dfrac{5}{3}$; б) $\cos z=\dfrac{3i}{4}$; в) $\operatorname{sh} z=0$; г) $\operatorname{ch} z=0$.

9. Доказать следующие равенства:

а) $\operatorname{Arcctg} z=\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z-i}{z+i}$; б) $\operatorname{Arctg} z=\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i+z}{i-z}$;

в) $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$; г) $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$.

10. Найти все значения следующих степеней:

а) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; б) $i^{\sin i}$.

Контрольная работа №2

1. Является ли функция $w=\mathrm{e}^{2i\bar{z}}$ голоморфной в начале координат? Доказать, опираясь на теорему Коши-Римана, голоморфность на $\mathbf{C}$ следующих функций: а) $\sin z$; б) $\operatorname{ch} z$.
2. Найти множества точек, в которых функции моногенны, голоморфны и вычислить производные функций в этих точках:
   а) $f(z)=z(\bar{z}-3\operatorname{Im} z)$; б) $f(z)=2xy-i(x^2-y^2)$.
3. Восстановить голоморфные функции по их действительной части $U(x;y)$ или мнимой части $V(x;y)$:
   а) $V(x;y)=3x^2y-y^3$, $f(i)=0$; б) $U(x;y)=x^3-3xy^2$, $f(i)=0$;
   в) $U(x;y)=\mathrm{e}^{-y}\sin x+y$, $f(0)=1$; г) $V(x;y)=\mathrm{e}^{-y}\cos x+x$, $f(0)=1$;
   д) $V(x;y)=y\cos y\operatorname{ch} x+x\sin y\operatorname{sh} x$, $f(0)=0$;
   е) $U(x;y)=x\cos x\operatorname{ch} y+y\sin x\operatorname{sh} y$, $f(0)=0$.
4. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках ± 1 и данными полуосями, параболы $y=x^2, x\in\mathbf{R}$, отрезка прямой, соединяющей две точки.
5. Установить, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при следующих отображениях:
   а) $w=z^2-2z$; б) $w=\dfrac{z}{2z-1}$; в) $w=\dfrac{1+iz}{1-iz1}$; г) $w=\mathrm{e}^{2iz}$.
6. Найти множества всех тех точек z_0, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:
   а) $w=z^2-2z$; б) $w=\dfrac{z}{2z-1}$; в) $w=\dfrac{1+iz}{1-iz1}$; г) $w=\mathrm{e}^{2iz}$.
7. Найти длины образов следующих кривых Г при указанных отображениях:
   а) $\Gamma: z(t)=it+1,\ t\in[0;1];\ \ f(z)=z^2$;
   б) $\Gamma: z(t)=(1+i)t,\ t\in[0;2\pi];\ \ f(z)=\mathrm{e}^z$;
   в) $\Gamma: z(t)=it,\ t\in[0;2\pi];\ \ f(z)=\mathrm{e}^z$;
   г) $\Gamma: z(t)=(1+i)t,\ t\in[0;1];\ \ f(z)=z^n,\ n\in\mathbf{N}$;
   д) $\Gamma: z(t)=\mathrm{e}^{it},\ t\in[0;2\pi];\ \ f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.
8. Найти площади образов областей D при указанных отображениях:
   а) $D=\left\{z\in\mathbf{C}:\ 2<|z|<3,\ \arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\};\ \ f(z)=z^2$;

б) $D=\{z\in\mathbf{C}:\ 0<\operatorname{Re} z<1,\ |\operatorname{Im} z|<\pi\};\quad f(z)=\mathrm{e}^{Z}$;

в) D – квадрат с вершинами в точках 0, 1, $i+1$, i; $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$.

9. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами $(-1;0)$; $(-4;-1)$; $(-4;1)$ на треугольник с вершинами $(3;0)$; $(5;-6)$; $(1;-6)$.
10. Доказать, что линии уровня модуля дробно-линейной функции являются обобщёнными окружностями.
11. Доказать, что линии уровня действительной части дробно-линейной функции являются обобщёнными окружностями.
12. Доказать, что образом обобщённой окружности при дробно-линейной функции является обобщённая окружность.
13. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ окружностями $|z|=1$, $|z-i|=1$ разбивается на четыре двуугольника. Выяснить, во что преобразуются данные области при отображении $w=\left(z+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)\Big/\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)$.

Контрольная работа № 3

1. Опираясь на теорему Тейлора, доказать формулы:

а) $\mathrm{e}^{z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^{n}}{n!},\ z\in\mathbf{C}$; б) $\operatorname{sh} z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in\mathbf{C}$.

1. Опираясь на разложение $\mathrm{e}^{z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^{n}}{n!},\ z\in\mathbf{C}$, доказать формулы:

а) $\mathrm{e}^{az}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{az_0}\dfrac{(z-z_0)^{n}}{n!},\ z\in\mathbf{C},\ z_0=\mathrm{const}\in\mathbf{C},\ a=\mathrm{const}\in\mathbf{C}$;

б) $\operatorname{sh} az=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1},\ z\in\mathbf{C},\ a=\mathrm{const}\in\mathbf{C}$;

в) $\sin^{2} z$; г) $\sin^{4} z+\cos^{4} z$; д) $\mathrm{e}^{z}\sin z$.

2. Опираясь на разложение $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^{n}$, справедливое при $|z|<1$, доказать формулы:

а) $\dfrac{1}{(1-z)^{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^{n},\ |z|<1$; б) $\dfrac{1}{z^{2}+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}z^{2n},\ |z|<1$.

3. Найти разложение следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$:

а) $\dfrac{1}{(1+z)^{2}}$; б) $\dfrac{1}{(1-z^{2})^{2}}$; в) $\dfrac{1}{(1+z^{3})^{2}}$; г) $\dfrac{1}{(1-z^{6})^{3}}$.

4. Доказать формулы:

а) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} z+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+z}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^{4n+1}}{4n+1},\ |z|<1;$

б) $\dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)=-1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n(n+1)},\ |z|<1.$

5. Найти множества точек $z\in\mathbf{C}$, в которых сходятся следующие ряды Лорана:

а) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-|n|}z^n$; б) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{z^n}{3^n+1}$; в) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(2^{-n^3+1}\right)^{-1}(z-a)^{2n},\ a=\mathrm{const}\in\mathbf{C}$.

6. Опираясь на формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать следующие формулы:

а) $\dfrac{1}{z-b}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}b^{-n-1}z^n,\ |z|>|b|;$ б) $\dfrac{1}{z^2-b^2}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}b^{-2(n+1)}z^{2n},\ |z|>|b|;$

в) $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n;\ a\neq b,\ |z-a|>|b-a|;$

г) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z+a}{z-a}=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{1}{2n+1}a^{-2n-1}z^{2n+1},\ |z|>|a|.$

7. Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $1<|z|<2$:

а) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$; б) $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$; в) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$;

г) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$; д) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$; е) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^4+4)}$.

8. Следующие функции разложить в ряды Тейлора или Лорана по степеням $z-1$ и $z+3i$: а) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$; б) $\dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$.

9. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D:

а) $z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}},\ \ a=0,\ D:0<|z|<\infty$; б) $z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right),\ \ a=0,\ D:0<|z|<\infty$;

в) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2},\ \ a=2,\ D:0<|z-2|<\infty$;

г) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)},\ \ a=0,\ D:0<|z|<1$; д) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)},\ \ a=1,\ D:1<|z-1|<2$.

10. Найти вычеты следующих функций во всех их изолированных особых точках:

а) $\dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $e^{\frac{1}{z}}$; в) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; г) $z^2 \sin\dfrac{\pi}{z}$;

д) $\dfrac{\cos z}{z-\pi/4}$; е) $z\, e^{\frac{1}{z-1}}$; ж) $z^n\, e^{\frac{a}{z}}$; з) $\dfrac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$;

и) $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$; к) $\dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$; л) $\dfrac{1+z^{10}}{z^6\left(z^2+4\right)}$;

м) $\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, $a \neq 0$, $n = 1,2,\ldots$; н) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$;

о) $\dfrac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$; п) $\dfrac{1+z^8}{z^4\left(z^4+1\right)}\cos z \operatorname{ch} z$; р) $\dfrac{\sin z}{\left(z^2+1\right)^2}$.

11. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных и.о.т:

а) $\dfrac{1}{z+z^3}$; б) $\dfrac{z^2}{1+z^4}$; в) $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$; г) $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$;

д) $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}$; е) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n = 1,2,\ldots$; ж) $\dfrac{1}{\sin \pi z}$;

з) $\operatorname{ctg} \pi z$; и) $\operatorname{th} z$; к) $\operatorname{cth}^2 \pi z$; л) $\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$;

м) $\dfrac{1}{e^z+1}$; н) $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$; о) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

12. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

а) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$; б) $\cos\left(\pi\dfrac{z+2}{2z}\right)$; в) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$;

г) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$; д) $\dfrac{\left(z^{10}+1\right)\cos\frac{1}{z}}{\left(z^5+2\right)\left(z^6-1\right)}$; е) $z\cos^2\dfrac{\pi}{2}$.

15. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{dz}{1+z^4}$, $D:\ |z-1|<1$; б) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$, $D:\ |z-1-i|<2$;

в) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{\sin z}{(z+1)^3}dz$, $D:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$; г) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2(z-3)^2}$, $D:\ 2<|z|<4$;

д) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}dz$, $D:\ |z|>4$; е) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{dz}{z^3\left(z^{10}-2\right)}$, $D:\ |z|<2$;

ж) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz,\ D:\ |z|<3$; з) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz,\ D:\ |z|<2$;

и) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z+1} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\, dz,\ D:\ |z|<2$; к) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1} dz,\ D:\ |z|>3$;

л) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} z \sin\frac{z+1}{z-1} dz,\ D:\ |z|<2$; м) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \sin\frac{1}{z-1} dz,\ D:\ |z-1|>1$;

н) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} \frac{dz}{z},\ D:\ |z-2|+|z+2|<6$; о) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1} dz,\ D:\ |z|<2$;

п) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z\, dz}{(z^3-z)(z-i)} dz,\ D:\ |z-1|<1$; р) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz,\ D:\ |z-1|>1$;

с) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{2z^2-i} dz,\ D:\ |z|<1,\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0$;

т) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z\, dz}{\mathrm{e}^{z^2}-1} dz,\ D:\ |z|>4$; у) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^3\, dz}{\mathrm{e}^{z^2}-1} dz,\ D:\ |z|<4$;

ф) $\displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{z^2\, dz}{\mathrm{e}^{2\pi i z^3}-1} dz,\ D:\ \sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}\quad (\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ).$

Контрольная работа №6

1. Вычислить определённые интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ -1<a<1,\ n\in\mathbf{N}$;

б) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2},\ -1<a<1,\ n\in\mathbf{N}$;

в) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2\cos\varphi)^n \cos n\varphi}{5+4\cos\varphi} d\varphi,\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

2. Вычислить несобственные интегралы и главные значения интегралов (задачи на применение леммы Жордана):

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^2-2x+10}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2+2x+10}$; в) $\displaystyle v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px\, dx}{1+x^3},\ p\in\mathbf{R}$.

3. Вычислить несобственные интегралы и главные значения интегралов от рациональных функций:

а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(ax^2+b)^4},\ a>0,\ b>0$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^2)^2},\ a>0$; в) $\displaystyle v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4-1}$.

2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности *37.* *38. ОПК-3.10 Применяет основные методы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных*	1. Укажите теоретические результаты, позволяющие решить задачу поиска экстремума функции на отрезке. 2. Выберите одну из подстановок Эйлера, позволяющую найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. Найдите данный неопределенный интеграл. 3. Проведите анализ свойств функции и постройте эскиз её графика по характерным точкам (нулям, экстремумам, точкам перегиба) $f(x) = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$. 4. Пусть $f(x) = x \cdot \sin \pi x$. Докажите, что для любого числа M найдется точка $x_0 > M$, такая, что $f'(x_0) = 0$. Приведите геометрическую интерпретацию задачи. 5. Найдите площадь области D, ограниченной указанными линиями, а) действуя по определения, и б) применяя формулу Грина *D : y = x² – 1; y = - x² + 1.*	• *Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала* *– 30 – 40 баллов* • *Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала* *– 20 – 29 балла* • *Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены не все необходимые примеры* *– 10 - 19 баллов* • *Даны неверные ответы на поставленные вопросы* *– 0 - 9 баллов*

ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности *ОПК-3.11 Решает задачи теории функций комплексного переменного*	1. Расскажите о вычислении интегралов по границе области при помощи вычетов. Вычислите интеграл. 2. Расскажите о приложении вычетов к вычислению интегралов от вещественных функций, в частности, к вычислению несобственных интегралов. Найдите интеграл.	• *Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала – 30 – 40 баллов* • *Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала – 20 – 29 балла* • *Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены не все необходимые примеры – 10 - 19 баллов* • *Даны неверные ответы на поставленные вопросы – 0 - 9 баллов*

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154399
2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 — 2020. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-4866-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/126708
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149365
4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник / И. И. Привалов. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-0913-6. — Текст : электронный //

Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167779

б) дополнительная литература

1. Рощенко, О. Е. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / О. Е. Рощенко, Е. А. Лебедева. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. — 76 c. — ISBN 978-5-7782-3944-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/98715.html
2. Жукова, Г. С. Математический анализ в примерах и задачах. Часть 1 : учебное пособие / Г. С. Жукова, М. Ф. Рушайло. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 260 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015963-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072156
3. Кутузов, А. С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : [16+] / А. С. Кутузов. – 2-е изд. стер. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2017. – 127 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166
4. Шершнев, В. Г. Математический анализ: сборник задач с решениями : учеб. пособие / В.Г. Шершнев. — Москва : ИНФРА-М, 2018. — 164 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). ISBN 978-5-16-005487-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/958345
5. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е. С. Половинкин. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 254 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-013608-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1125614
6. Ахтамова, С. С. Теория функций комплексного переменного : учебно-методическое пособие / С. С. Ахтамова, Е.К. Лейнартас, А. П. Ляпин. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. - 100 с. - ISBN 978-5-7638-4330-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1816573
7. Богомолова, Е. В. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / Е. В. Богомолова. — Дубна : Государственный университет «Дубна», 2018. — 107 с. — ISBN 978-5-89847-540-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154470
8. Пономарев, А. В. Теория функций комплексного переменного : методические указания / А. В. Пономарев, И. Э. Бессарабская. — Москва : РТУ МИРЭА, 2019. — 46 с. — Текст : электронный // Лань :

электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/171497
9. Нахман, А. Д. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / А. Д. Нахман. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 212 с. — ISBN 978-5-4486-0597-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/80317.html

2) Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС Лань https://e.lanbook.com/ Договор № 4-е/23 от 02.08.2023 г.
2. ЭБС Znanium.com https://znanium.com/ Договор № 1106 эбс от 02.08.2023 г.
3. ЭБС Университетская библиотека online https://biblioclub.ru Договор № 02-06/2023 от 02.08.2023 г.
4. ЭБС ЮРАЙТ https://urait.ru/ Договор № 5-е/23 от 02.08.2023 г.
5. ЭБС IPR SMART https://www.iprbookshop.ru/ Договор № 3-е/23К от 02.08.2023 г.
6. https://cyberleninka.ru/ научная электронная библиотека «Киберленинка».
7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp;
8. Репозитарий ТвГУ http://eprints.tversu.ru

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:

1. www.math.ru – сайт посвящён Математике и математикам. Этот сайт для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой
2. http://www.edu.ru/ – Федеральный портал «Российское образование»
3. www.exponenta.ru – образовательный математический сайт
4. www.matematicus.ru – учебный материал по различным математическим курсам

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Вопросы к экзамену

1 семестр

1. Множества. Подмножества. Примеры. Теоретико-множественные операции с множествами: объединение, пересечение, разность множеств.
2. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли.
3. Бином Ньютона.
4. Понятие десятичной дроби и действительного числа. Конечные десятичные дроби. Отношение порядка на множестве действительных чисел. Свойства отношения порядка.
5. Ограниченные множества. Верхние и нижние грани. Примеры. Свойства. Теоремы о существовании верхней и нижней грани.
6. Признаки верхней и нижней грани.
7. Рациональные и иррациональные числа.
8. Принцип Кантора. Принцип Бореля – Лебега.
9. Понятие отношения и функции. Примеры. Значение функции в точке. Область определения и множество значений функции. График функции. Различные способы задания функции.
10. Образ и прообраз множества при отображении. Примеры. Свойства.
11. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры.
12. Композиция функций. Примеры.
13. Понятие обратной функции. Примеры.
14. Условия существования обратной функции.
15. Числовые функции. Ограниченные функции. Монотонные функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Примеры. Свойства.
16. Элементарные функции. Классификация элементарных функций.
17. Функции, заданные параметрически, и функции, заданные неявно.
18. Понятие последовательности. Подпоследовательность. Примеры.
19. Понятие предела числовой последовательности. Примеры.
20. Основные свойства числовых последовательностей. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Сходимость подпоследовательности.
21. Предел числовой последовательности и арифметические операции. Неопределенности.
22. Предельный переход в неравенствах.
23. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
24. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.
25. Число e как верхняя грань и как предел.
26. Существование монотонной подпоследовательности у произвольной последовательности. Принцип Больцано – Вейерштрасса.
27. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
28. Бесконечно малые последовательности. Предел произведения бесконечно малой и ограниченной последовательности.

29.Понятие предельной точки множества. Примеры. Характеризация предельной точки множества в терминах последовательностей элементов множества

30. Понятие предела функции в точке. Эквивалентные определения.

31. Односторонние пределы. Теорема о существовании предела функции в терминах односторонних.

32. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.

33. Основные свойства предела функции в точке. Единственность предела. Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел в точке.

34. Предел функции в точке и арифметические операции. Неопределенности при вычислении пределов. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной функции.

35. Теорема о пределе сложной функции.

36. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

37. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

38. Эталонные пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$,

39. Эталонные пределы: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\cdot\log_a x=0$.

40. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные функции. O – символика. Примеры. Свойства.

41. Понятие непрерывной функции в точке. Эквивалентные определения. Примеры.

42. Односторонняя непрерывность. Примеры. Условие непрерывности в терминах односторонней. Классификация точек разрыва функции.

43. Непрерывность функции в точке и арифметические операции. Непрерывность композиции непрерывных функций.

44. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.

45. Теоремы об обращении непрерывной функции в нуль и о промежуточных значениях непрерывной функции.

46. Теорема о непрерывности обратной функции.

47.Понятие дифференцируемой функции и производной функции в точке. Примеры. Производные базисных элементарных функций

48. Односторонние производные. Примеры. Условия дифференцируемости в терминах односторонних производных.

49. Условие дифференцируемости функции в точке в терминах приращения. Дифференциал.

50. Дифференцируемость композиции дифференцируемых функций.

51. Дифференцируемость и арифметические операции. Производные

52. Дифференцируемость обратной функции. Производные обратныч тригонометрических функций

53. Геометрический смысл производной.

54. Односторонние полукасательные. Условие дифференцируемости в терминах односторонних полукасательных. Геометрическая интерпретация.
55. Понятие экстремума функции. Теорема Ферма.
56. Теорема Ролля.
57. Теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях.
58. Необходимые и достаточные условия экстремума.
59. Правила Лопиталя.
60. Производные высших порядков.
61. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме.
62. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши.
63. Формула Тейлора для функций $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. Сходимость остаточного члена.
64. Формула Тейлора для функций $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Коши. Сходимость остаточного члена.
65. Локальная формула Тейлора. Локальная формула Тейлора для базисных элементарных функций.
66. Достаточные условия экстремума в терминах высших производных.
67. Понятия выпуклой и вогнутой функции. Геометрическая интерпретация. Непрерывность и односторонняя дифференцируемость выпуклой и вогнутой функции.
68. Условия выпуклости и вогнутости функции в терминах первой и второй производной.
69. Условия выпуклости и вогнутости функции в терминах полукасательных и касательных. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия.

2 семестр

1. Понятие интеграла Римана. Примеры интегрируемой и неинтегрируемой по Риману функции.
2. Критерий интегрируемости в терминах частных сумм. Критерий Лебега интегрируемости функции.
3. Интегрируемость монотонной, кусочно-монотонной, непрерывной и кусочно-непрерывной функции.
4. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функции. Интегрируемость модуля интегрируемой функции и произведения интегрируемых функций.
5. Свойства линейности и аддитивности интеграла Римана.
6. Свойство монотонности интеграла Римана. Оценка модуля интеграла.
7. Независимость интеграла от значений функции в конечном числе точек.
8. Теорема о существовании первообразной.
9. Понятие первообразной. Структура множества первообразных непрерывной и кусочно-непрерывной функции.
10. Формула Ньютона – Лейбница.

11. Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Свойство линейности неопределенного интеграла.
12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
13. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
14. Интегрирование рациональных функций.
15. Интегрирование иррациональных функций.
16. Интегрирование тригонометрических функций.
17. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Примеры.
18. Первая теорема о среднем значении для интеграла Римана и следствия из нее.
19. Вторая теорема о среднем значении для интеграла интеграла Римана
20. Понятие кривой. Вычисление длины кривой.
21. Вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.
22. Несобственного интеграла. Основные свойства. Интегралы: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p} dx$.
23. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
24. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов. Примеры
25. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
26. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Примеры.
27. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Примеры.
28. Понятие числового ряда и сходимости ряда. Примеры. Гармонический ряд.
29. Необходимое условие сходимости числового ряда. Сходимость остатка ряда.

a. Критерий Коши сходимости числового ряда. Абсолютная сходимость.

30. Лемма Коши о разрежении ряда. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
31. Признаки сравнения сходимости положительного числового ряда.
32. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительного ряда. Примеры.
33. Интегральный признак сходимости положительного ряда
34. Абсолютная сходимость ряда. Признаки Абеля и Дирихле сходимости ряда с произвольными членами. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.
35. Умножение рядов.
36. Группировка членов ряда. Перестановка членов ряда. Теорема Римана.

37. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры.

Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Признак равномерной сходимости функциональной последовательности.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

Теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности и функционального ряда.

Понятие степенного ряда. Теорема Коши–Адамара. Радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда.

Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Теорема об отыскание коэффициентов степенного ряда по его сумме.

Ряд Тейлора. Условие сходимости ряда Тейлора. Разложение в ряд Тейлора базисных элементарных функций. Понятие тригонометрического ряда. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда.

Понятие ряда Фурье. Коэффициенты Фурье. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье.

Неравенство Бесселя. Сходимость к нулю коэффициентов Фурье.

Ядро Дирихле. Свойства. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье.

Принцип локализации.

Признаки Дирихле сходимости ряда Фурье в точке.

Суммы Фейера. Равномерная сходимость последовательности сумм Фейера непрерывной функции. Равенство Парсеваля

Интеграл Фурье. Признаки сходимости.

Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка.

3 семестр

1. Пространство R^n. Скалярное произведение. Неравенство Коши – Буняковского. Норма. Свойства нормы.

Открытые и замкнутые множества. Внутренность и замыкание множества. Предельные точки. Сходимость последовательности.

Понятие функции $f: R^m \to R^n$. График функции $f: R^2 \to R$. Примеры. Проекция. Представление функции $f: R^m \to R^n$ с помощью координатных функций.
Предел и непрерывность функции $f: R^m \to R^n$. Эквивалентные определения. Примеры.
Свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции.
Непрерывность функции $f: R^m \to R^n$ в случае непрерывности координатных функций.
Теорема Вейерштрасса.
Непрерывность по фиксированной переменной и по подпространству.
Понятие дифференцируемой функции $f: R^m \to R$. Градиент. Дифференциал. Единственность градиента. Примеры.
Условие дифференцируемости в терминах приращений. Непрерывность дифференцируемой функции.
Частные производные функции. Правило вычисления. Примеры.
Теорема о структуре градиента. Пример функции, имеющей в точке все частные производные, но не дифференцируемой в этой точке.
Теорема о дифференцируемости функции в случае непрерывности частных производных.
Дифференцирование сложной функции.
Геометрическая интерпретация градиента. Касательная плоскость и нормаль.
Производная по направлению.
Частные производные и дифференциалы высших порядков. Примеры. Формальная запись дифференциалов высших порядков.
Формула Тейлора.

19. Локальный экстремум функции $f: R^m \to R$. Примеры. Необходимые условия экстремума.
20. Достаточные условия экстремума для функции $f: R^m \to R$ и $f: R^2 \to R$.
21. Понятие дифференцируемой функции $f: R^m \to R^n$. Оператор – производная. Примеры. Условие дифференцируемости в терминах приращений. Непрерывность дифференцируемой функции.
22. Теорема о структуре матрицы оператора производной.
23. Дифференцируемость функции $f: R^m \to R^n$ в случае непрерывности частных производных координатных функций.
24. Дифференцируемость композиции.
25. Теоремы о конечных приращениях.
26. Непрерывно дифференцируемые функции $f: R^m \to R^n$. Условия непрерывной дифференцируемости.
27. Теорема об обратной функции.
28. Понятие неявной функции. Примеры. Теорема о неявной функции.

29. Правило дифференцирования неявных функций. Теорема о системе неявных функций.
30. Понятие условного экстремума. Примеры.
31. Необходимые условия условного экстремума.
32. Функция Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума.
33. Измеримые по Жордану множества. Мера Жордана. Примеры множеств не измеримых по Жордану. Критерий измеримости.
34. Понятие двойного интеграла. Критерий интегрируемости в терминах интегральных сумм.
35. Критерий Лебега интегрируемости многомерной функции. Интегрируемость непрерывной функции.
36. Свойства интеграла. Линейность. Монотонность. Аддитивность. Оценка модуля интеграла.
37. Теорема Фубини. Вычисление двойных интегралов.
38. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.
39. Переход к полярным координатам в качестве замены переменных.
40. Тройные интегралы. Вычисление. Свойства.
41. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам.
42. Многомерные интегралы
43. Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой.
44. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Свойства. Вычисление сведением к определенному интегралу.
45. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.
46. Формула Грина.
47. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
48. Приложения криволинейных интегралов.

4 семестр

1. Поле комплексных чисел. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Геометрические свойства комплексных чисел.
2. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость. Сходящиеся последовательности в $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}}$. Лемма о покоординатной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Евклидова и сферическая метрики. Топологии в $\mathbf{C}$ и $\overline{\mathbf{C}}$ (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).
4. Функции комплексного переменного (ф.к.п.). Непрерывность, ограниченность ф.к.п. Теоремы о непрерывных ф.к.п. на компакте, в области.

5. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах. Критерии моногенности и голоморфности ф.к.п. в точке. Связь голоморфных и гармонических функций.
6. Аффинные преобразования. Целые линейные преобразования. Декомпозиция целой линейной функции, её свойства.
7. Касательное отображение. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определения конформного отображения 1-го и 2-го рода. Якобиан конформного отображения. Примеры.
8. Криволинейные интегралы от ф.к.п., их свойства, вычисление. Примеры вычисления интегралов от ф.к.п.
9. Интегральная теорема Коши-Гурса и её обобщение на многосвязные области (с доказательствами).
10. Интегральная формула Коши. Доказательство, обобщение на случай многосвязных областей, следствия.
11. Неопределённый интеграл от ф.к.п. в плоской области и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.
12. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.
13. Поточечная, равномерная, локально-равномерная сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Теорема Абеля о степенных рядах. Существование радиуса сходимости и методы его вычисления. Формула Коши-Адамара. Локально-равномерная сходимость, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.
15. Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.
16. Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.
17. Ряды Лорана, структура области сходимости. Доказательство теоремы Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
18. Внутренняя теорема единственности (доказательство). Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.
19. Изолированные особые точки голоморфной функции, их классификация. Критерии у.о.т. и полюса. Нахождение порядка полюса. Примеры.
20. Критерий с.о.т. Бесконечность как и.о.т. голоморфной функции. Классификация и критерии и.о.т. на бесконечности.

21. Определение вычета в и.о.т. и формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.
22. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Лемма Жордана и её применения.

Темы курсовых работ (по теории функций комплексного переменного, 4-й семестр)

1. Система комплексных чисел: координатная, алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
2. Формулы Эйлера и Муавра.
3. Модуль и аргумент, радикал и логарифм комплексного числа.
4. Тождества и неравенства для комплексных чисел, их векторная интерпретация.
5. Евклидова метрика и элементы евклидовой топологии на C.
6. Формулы стереографической проекции.
7. Формула для сферического расстояния. Элементы сферической топологии на $\overline{\mathbf{C}}$.
8. Сходимости в евклидовой метрике и сферической метрике.
9. Кольцо непрерывных функций в точке и на множестве.
10. Моногенность и голоморфность ф.к.п.
11. Формальные производные и условия Коши–Римана.
12. Целое линейное преобразование.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной от голоморфной функции.
14. Конформные отображения первого и второго рода.
15. Голоморфность и конформность в расширенной комплексной плоскости. Однолистность и конформность мёбиусовых преобразований в C.
16. Круговое свойство преобразований Мёбиуса.
17. Группа Mob $\overline{\mathbf{C}}$ и её подгруппы.
18. Свойства преобразований симметрия точек относительно окружности на $\overline{\mathbf{C}}$.
19. Существование мёбиусова автоморфизма римановой сферы, нормированного соответствием трёх пар точек.
20. Вычисление групп мёбиусовых автоморфизмов круга и полуплоскости.

Типовые вопросы и задачи для проверки самостоятельной работы (по теории функций комплексного переменного, 4-й семестр)

1. Дать определение модуля, аргумента комплексного числа.
2. Дать определение алгебраического корня из комплексного числа

3. Дать определение открытого и замкнутого множеств, предельных и граничных точек, границы, замыкания, связности множества, области, компакта, континуума.
4. Дать определение непрерывности ф.к.п. в евклидовой и сферической метриках.
5. Дать определение моногенной и голоморфной функции.
6. Сформулировать условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах.
7. Сформулировать геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.
8. Сформулировать теорему Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений.
9. Сформулировать интегральную теорему Коши-Гурса.
10. Сформулировать интегральную формулу Коши.
11. Сформулировать теорему Морера.
12. Привести формулы Коши для производных голоморфной функции.
13. Сформулировать теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
14. Сформулировать теорему Абеля о степенных рядах.
15. Сформулировать теорему о представлении голоморфной функции степенным рядом.
16. Привести разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора.
17. Сформулировать теорему Лиувилля.
18. Сформулировать теорему Лорана.
19. Привести неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
20. Сформулировать внутреннюю теорему единственности.
21. Дать определение изолированной особой точки голоморфной функции, привести их классификацию.
22. Сформулировать критерии у.о.т. и полюса.
23. Сформулировать критерий с.о.т.
24. Дать определение вычета в и.о.т. и привести формулы для вычисления вычетов.
25. Сформулировать теорему Коши о вычетах.
26. Сформулировать теорему о сумме всех вычетов.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление глоссария. В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

5. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

6. Подготовка к экзамену. При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому модулю (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы обучающихся на занятиях семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы и иные аналогичные занятия), оценки индивидуальной работы обучающихся и оценки за выполнение заданий рейтингового контроля успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся экзаменом, по итогам семестра составляет 60.

Обучающемуся, набравшему 40-54 балла, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в рейтинговой ведомости учета успеваемости и зачетной книжке может быть выставлена оценка «удовлетворительно».

Обучающемуся, набравшему 55-57 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 15 баллов и выставлена экзаменационная оценка «хорошо».

Обучающемуся, набравшему 58-60 баллов, при подведении итогов семестра (на последнем занятии по дисциплине) в графе рейтинговой ведомости учета успеваемости «Премиальные баллы» может быть добавлено 27 баллов и выставлена экзаменационная оценка «отлично».

В каких-либо иных случаях добавление премиальных баллов не допускается.

Обучающийся, набравший до 39 баллов включительно, сдает экзамен. При наличии подтвержденных документально уважительных причин, по которым были пропущены занятия (длительная болезнь, обучение в другом вузе в рамках академической мобильности и др.), обучающийся имеет право отработать пропущенные занятия и получить дополнительные баллы в рамках установленных баллов за модуль. Сроки и порядок отработки определяет преподаватель. Баллы выставляются в графе «отработка».

Ответ обучающегося на экзамене оценивается суммой до 40 рейтинговых баллов. Итоговая оценка складывается из суммы баллов, полученных за семестр, и баллов, полученных на экзамене. Обучающемуся, который сдает экзамен, премиальные баллы не начисляются.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.
- Сроки проведения рейтингового контроля:

осенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

- *весенний семестр* – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

Методические указания для самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью изучения дисциплины. Кроме того, в темах, изучаемых при контактной работе со студентами, есть отдельные учебные вопросы, которые студенты должны изучить самостоятельно. Контроль знаний при самостоятельном изучении тем и вопросов дисциплины осуществляется при проведении текущего контроля в виде устных опросов, письменных контрольных работ и тестирования во время рейтинг-контроля. Вопросы для самостоятельной работы также включаются в темы рефератов, которые студенты защищают на семинарских занятиях, и в перечень вопросов для экзамена.

Записав лекцию или составив ее конспект, не следует оставлять работу над лекционным материалом до начала подготовки к экзамену. Нужно проделать как можно раньше ту работу, которая сопровождает конспектирование письменных источников и которую не удалось сделать во время записи лекции: прочесть свои записи, расшифровав отдельные сокращения, проанализировать текст, установить логические связи между его элементами, в ряде случаев показать их графически, выделить главные мысли, отметить вопросы, требующие дополнительной обработки, в частности, консультации преподавателя. При работе над текстом лекции студенту необходимо обратить особое внимание на проблемные вопросы, поставленные преподавателем при чтении лекции, а также на его задания и рекомендации. Работая над текстом лекции, необходимо иметь под рукой справочные издания: словарь-справочник, энциклопедический экономический словарь, в которых можно найти объяснение многим встречающимся в тексте терминам, содержание которых студент представляет себе весьма туманно, хотя они ему и знакомы.

В процессе организации самостоятельной работы большое значение имеют консультации с преподавателем, в ходе которых можно решить многие проблемы изучаемого курса, уяснить сложные вопросы.

VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория: 207 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Интерактивная система Smart Board 660iv со встроенным проектором. Меловая доска, комплект учебной мебели.	Google Chrome-бесплатно; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows-Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022; Lazarus –бесплатно; OpenOffice – бесплатно; Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО- бесплатно; ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО-бесплатно
Учебная аудитория: 208 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Меловая доска, комплект учебной мебели.	Google Chrome-бесплатно; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows-Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022; Lazarus –бесплатно; OpenOffice – бесплатно; Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО- бесплатно;

Учебная аудитория: 312 (170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Интерактивная система Promethean ActivBoard 587. Меловая доска, комплект учебной мебели	ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО-бесплатно Google Chrome-бесплатно; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows-Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022; Lazarus –бесплатно; OpenOffice – бесплатно; Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО- бесплатно; ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО-бесплатно

VIII. Перечень обновлений рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	I - X	Корректировка всех разделов в соответствии с новым стандартом	Протокол № 6 от 28.02.2017
2.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Дополнение списков. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 01.09.2018
3.	I - VIII	Корректировка всех разделов в соответствии с новым стандартом	Протокол № 10 от 29.06.2021
4.	V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	Обновление списков ПО. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 1.09.2023