Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП:
________ Н.А. Семыкина
«_9_» _06_ 2023 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Математический анализ

Направление подготовки
10.05.01. Компьютерная безопасность

Профиль подготовки
Математические методы защиты информации

Для студентов 1, 2 курсов
Форма обучения
Очная

Уровень высшего образования
СПЕЦИАЛИТЕТ

Составители: к. ф.-м. н. доц. А.А. Голубев
д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Шеретов

Тверь 2023

I. Аннотация

1. Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

Математический анализ

2. Цель и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются изучение основных понятий указанной дисциплины необходимых для освоения ООП и последующей профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование знаний о математике, как особом способе познания мира и образе мышления, общности её понятий и представлений;
- выработка умений и навыков решения математически формализованных задач;
- формирование теоретических знаний по математическому анализу (основные понятия, определения, теоремы и факты) необходимых для изучения последующих математических и специальных дисциплин, а также решения экономических и прикладных задач.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Математический анализ является дисциплиной базовой части, формирующей общепрофессиональные компетенции.

Математический анализ имеет логические и содержательно-методические взаимосвязи со всеми математическими и естественнонаучными дисциплинами и необходим для изучения этих дисциплин.

Для освоения дисциплины необходимы устойчивое знание школьного курса математики и наличие устойчивых навыков работы с объектами элементарной математики.

Дисциплина изучается на 1, 2 курсе.

4. Общая трудоемкость дисциплины составляет 24 зачетные единицы, 864 часа.

контактная работа: лекции 216 часов, практические занятия 198 часов, **самостоятельная работа:** 198 часов, **контроль:** 252 часа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Формируемые компетенции	**Требования к результатам обучения** В результате изучения дисциплины студент должен:
Базовый **ОПК-2** – способностью корректно применять при решении профессиональных задач аппарат математического анализа, геометрии, алгебры, дискретной математики, математической логики, теории алгоритмов, теории вероятностей, математической статистики, теория информации, теоретико-числовых методов	**Владеть:** математическим аппаратом, изученным в данном курсе и необходимым для дальнейшего совершенствования профессиональной деятельности; **Уметь:** применять изученные математические методы при решении профессиональных задач и задач с практическим содержанием; **Знать:** разделы курса «Математический анализ» необходимые для дальнейшего изучения курсов, функционального анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, методов оптимизации, численных методов, теоретической механики и других разделов математики, а также других естественнонаучных дисциплин.
Продвинутый	**Владеть:** основными математическими понятиями, их взаимосвязи и развития, методами исследования и решения математических задач. **Уметь:** самостоятельно расширять

	свои математические знания и проводить математический анализ прикладных задач. **Знать:** методы, используемые для анализа, моделирования и решения прикладных задач.

6. Форма промежуточного аттестации: экзамен (1 – 4 семестры).

7. Язык преподавания: русский.

II. Содержание дисциплины и структура учебных видов деятельности

Наименование разделов и тем	Всего	Контактная работа		Само-стоя-тельная работа	Контроль
		Лекции	Практические работы		
	432	**108**	**108**	**90**	**126**
Раздел 1. Действительные числа	34	6	6	8	14
Раздел 2. Функции	38	6	6	12	14
Раздел 3. Предел числовой последовательности	56	12	12	14	18
Раздел 4. Непрерывность числовой функции	70	22	22	8	18
Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	96	30	30	14	22
Раздел 6. Интегрирование одномерных функций	82	20	20	22	20
Раздел 7. Числовые ряды	56	12	12	12	20
	432	**108**	**90**	**108**	**126**
Раздел 8. Функциональные и степенные ряды	60	16	12	12	20
Раздел 9. Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье	68	24	12	12	20
Раздел 10. Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных	124	30	26	26	42
Раздел 11. Кратные интегралы	76	18	20	28	10
Раздел 12. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности	104	20	20	30	34
Итого:	**864**	**216**	**198**	**198**	**252**

Учебная программа

Раздел 1
Действительные числа

Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.

Понятие десятичной дроби и действительного числа. Приближения десятичных дробей конечными дробями. Грани числовых множеств. Теоремы о существовании граней. Свойства граней.

Рациональные и иррациональные числа.

Арифметические операции с действительными числами. Признаки граней. Степень с произвольным показателем.

Принцип Кантора. Лемма Бореля–Лебега.

Раздел 2
Функции

Понятие функции. Общие свойства функций. Образ и прообраз множества при отображении. Классификация функций (инъективные, сюръективные, биективные отображения). Композиция функций. Обратная функция. Условия существования обратной функции.

Числовые функции. Ограниченные, монотонные, периодические, четные и нечетные функции. Неявное задание функции. Параметрическое задание функции.

Элементарные функции. Обзор свойств базисных элементарных функций. Классификация элементарных функций.

Раздел 3
Предел числовой последовательности

Предел числовой последовательности. Основные свойства: сходимость и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Бесконечные пределы.

Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Число e. Существование монотонной подпоследовательности. Принцип Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши.

Раздел 4
Непрерывность числовой функции

Предельные точки множества. Понятие предела функции в точке. Локальная ограниченность функции, имеющей предел в точке. Бесконечно малые функции. O–символика. Предел и арифметические операции. Предельный переход в неравенствах. Замена переменной под знаком предела. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

1-й и 2-й замечательные пределы. Другие эталонные пределы.

Понятие непрерывности функции в точке. Непрерывность и арифметические операции. Непрерывность композиции. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функции, заданной параметрически. Понятие кривой.

Непрерывность и ограниченность. Теорема Вейерштрасса.

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность и монотонность. Непрерывность обратной функции.

Раздел 5
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Понятие дифференцируемости функции в точке. Эквивалентные определения. Производная. Дифференциал. Геометрический смысл производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонняя дифференцируемость. Дифференцируемость функции, заданной параметрически. Гладкие кривые. Дифференцируемость элементарных функций. Дифференцируемость композиции. Дифференцируемость и арифметические операции. Дифференцируемость обратной функции.

Экстремум одномерной функции. Необходимые условия. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теоремы о конечных приращениях. Условия монотонности одномерной функции. Достаточные условия экстремума в терминах первой производной.

Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя.

Высшие производные и дифференциалы. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши. Локальная формула Тейлора. Представление формулой Тейлора базисных элементарных функций.

Выпуклые функции. Непрерывность выпуклой функции. Односторонняя дифференцируемость. Выпуклые дифференцируемые функции. Условия выпуклости в терминах производных.

Асимптоты. Применение производной к построению графиков функций.

Раздел 6
Интегрирование одномерных функций

Разбиения отрезка. Верхние и нижние интегральные суммы (суммы Дарбу). Верхний и нижний интеграл. Понятие интеграла Римана. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.

Основные свойства интеграла Римана: линейность, монотонность, аддитивность. Оценка модуля интеграла.

Понятие первообразной. Существование первообразной. Формула Ньютона-Лейбница

Неопределенный интеграл. Основные свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле. Техника неопределенного интегрирования. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций.

Теоремы о среднем значении для интеграла Римана.

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку и от неограниченной функции. Основные свойства. Вычисление. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле. Интегралы с несколькими особенностями.

Геометрические и физические приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Спрямляемые кривые. Длина кривой.

Раздел 7
Числовые ряды

Понятие числового ряда. Общий член. Частные суммы. Сходимость числового ряда. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Остаток ряда. Критерий Коши. Абсолютная сходимость.

Ряды с положительными членами. Признаки сходимости: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши. Интегральный признак.

Ряды с произвольными членами. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

Раздел 8
Функциональные и степенные ряды

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши. Непрерывность предельной функции. Предельный переход под знаком интеграла. Сходимость последовательности производных.

Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

Степенные ряды. Теорема Коши–Адамара. Радиус, интервал и область сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Ряд Тейлора. Условия сходимости. Разложение в степенной ряд базисных элементарных функций.

Раздел 9
Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Тригонометрический многочлен и тригонометрический ряд. Ортогональность тригонометрической системы функций. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда. Ряд Фурье. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Теорема о квадратичном уклонении. Неравенство Бесселя. Стремление к нулю коэффициентов Фурье.

Ядро Дирихле. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье.

Принцип локализации. Признак Дирихле сходимости ряда Фурье.

Суммы Фейера. Ядро Фейера. Интегральное представление сумм Фейера. Равномерная сходимость сумм Фейера. Теорема о квадратичном уклонении. Равенство Парсеваля.

Интеграл Фурье. Признак Дирихле сходимости интеграла Фурье.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье.

Раздел 10
Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных

Пространство R^n. Покоординатная сходимость последовательности элементов R^n. Компактные множества в R^n.

Функции многих переменных. Примеры. График. Линии уровня.

Предел и непрерывность функций многих переменных. Повторные пределы. Пределы по направлению. Непрерывность по фиксированной переменной. Теорема Вейерштрасса.

Понятие дифференцируемой функции. Градиент. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Частные производные. Структура градиента. Дифференцируемость функции в случае непрерывности частных производных. Дифференцируемость сложной функции. Дифференцируемость и арифметические операции. Геометрический смысл градиента. Касательная плоскость и нормаль. Производная по направлению

Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных. Формулы для вычисления дифференциалов высших порядков. Формула Тейлора.

Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Дифференцируемость композиции. Непрерывно дифференцируемые функции и диффеоморфизмы. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Отыскание производных неявных функций. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа.

Раздел 11
Кратные интегралы

Внешняя и внутренняя мера множества на плоскости. Измеримые по Жордану множества. Мера Жордана. Критерии измеримости. Множества меры нуль.

Двойные интегралы. Линейность, монотонность и конечная аддитивность двойного интеграла. Вычисление двойных интегралов сведением к повторным. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.

Тройные интегралы и интегралы высшей кратности. Приложения кратных интегралов.

Раздел 12

Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности

Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой.

Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление сведением к определенному интегралу.

Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.

Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Приложения криволинейных интегралов.

Понятие поверхности. Параметрическое задание поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Ориентация поверхности. Кривые на поверхности. Площадь поверхности.

Интегралы по поверхности 1-го и 2-го рода. Сведение к двойному интегралу.

Теоремы Стокса и Остроградского – Гаусса.

III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Темы курсовых работ

1. Свойства верхних и нижних граней множеств.
2. Топологические свойства множеств на числовой прямой.
3. Образы и прообразы множеств при отображениях.
4. Методы отыскания обратных функций.
5. Четные и нечетные функции.
6. Периодические функции.
7. Функции, заданные параметрически.
8. Функции, заданные неявно.
9. Ограниченные функции.
10. Вычисление пределов последовательностей с помощью теоремы о пределе промежуточной последовательности.
11. Вычисление пределов последовательностей с помощью теорем Теплица и Штольца.
12. Специальные приемы вычисления пределов последовательностей.
13. Контрпримеры, связанные с понятием предела последовательности.
14. Верхний и нижний предел последовательности.
15. Вычисление сумм рядов.
16. Перестановка и группировка членов ряда.
17. Умножение рядов.
18. Предельные точки множества.

19. Специальные приемы вычисления пределов функций.
20. O – символика.
21. Использование O– символики при вычислении пределов функций.
22. Контрпримеры, связанные с понятием предела функции.
23. Верхний и нижний предел функции.
24. Пределы монотонных функций.
25. Эталонные пределы.
26. Контрпримеры, связанные с понятием предела функции.
27. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.
28. Теоремы об обращении непрерывной функции в нуль и о промежуточных значениях непрерывной функции. Решение уравнений.
29. Непрерывность обратной функции.
30. Контрпримеры, связанные с понятием непрерывности функции.
31. Гиперболические функции.
32. Основные элементарные функции, как гомоморфизмы групп.
33. Доказательство дифференцируемости функций по определению.
34. Геометрический смысл производной.
35. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
36. Контрпримеры, связанные с понятием дифференцируемости функции.
37. Основные теоремы дифференциального исчисления.
38. Экстремум функции.
39. Практические задачи на отыскание экстремальных значений функций.
40. Экстремумы в геометрических задачах.
41. Исторические задачи на экстремум.
42. Доказательство неравенств с использованием свойств монотонности и экстремальных значений функции.
43. Формула Тейлора и приближенные вычисления.
44. Применение формулы Тейлора к отысканию пределов функций.
45. Выпуклые и вогнутые функции.
46. Экстремумы выпуклых и вогнутых функций.
47. Доказательство неравенств с использованием понятий выпуклости и вогнутости функций.
48. Отыскание асимптот.
49. Нелинейные асимптоты.
50. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
51. Дифференцирование неявно заданных функций.
52. Первообразные разрывных функций.
53. Специальные приемы вычисления неопределенных интегралов.
54. Контр примеры в теории интеграла Римана.
55. Специальные приемы вычисления определенных интегралов.
56. Вычисление интеграла Римана – Стильтьеса.
57. Теоремы о среднем значении для интеграла.
58. Отыскание площадей плоских фигур и и площадей поверхностей вращения с помощью интеграла.
59. Отыскание объемов с помощью интеграла.

60. Решение физических задач с помощью интеграла.
61. Вычисление некоторых несобственных интегралов.
62. Признаки сходимости несобственных интегралов.
63. Абсолютная сходимость несобственных интегралов.
64. Тонкие признаки сходимости положительных числовых рядов.
65. Абсолютная сходимость числовых рядов.
66. Некоторые приемы отыскания сумм числовых рядов.
67. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
68. Отыскание области сходимости функциональных рядов.
69. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
70. Дифференцирование функциональных рядов.
71. Интегрирование функциональных рядов.
72. Контрпримеры в теории функциональных рядов.
73. Область сходимости степенного ряда.
74. Разложение функций в степенные ряды.
75. Приближенные вычисления с помощью функциональных рядов.
76. Экспонента и логарифм, как сумма ряда.
77. Тригонометрические и гиперболические функции, как суммы функцирнальных рядов.
78. Топологические свойства множеств в многомерном пространстве.
79. Предел функции многих переменных. Повторные пределы. Предел по направлению. Предел по кривой. Контрпримеры, связанные с понятием предела функции.
80. Непрерывность функций многих переменных. Непрерывность по фиксированной переменной. Непрерывность по подпространству. Контрпримеры, связанные с понятием непрерывности.
81. Геометрическая интерпретация дифференцируемости для многомерной функции. Касательная плоскость и нормаль.
82. Частные производные и дифференциалы высших порядков многомерных функций. Контрпримеры, связанные с понятием дифференцируемости.
83. Экстремум многомерной функции.
84. Условный экстремум.
85. Мера Жордана.
86. Множества Лебеговой меры нуль.
87. Некоторые приемы вычисления двойных и тройных интегралов.
88. Многомерные интегралы.
89. Несобственные кратные интегралы.
90. Приложения кратных интегралов.
91. Некоторые приемы вычисления криволинейных интегралов интегралов.
92. Формула Грина.
93. Вторая формула Грина.
94. Приложения криволинейных интегралов.

Типовые вопросы и задачи для проверки самостоятельной работы

Введение в анализ

1. Приведите определение верхней грани множества.
2. Приведите пример множества, имеющего верхнюю грань и не имеющего наименьшего элемента.
3. Найдите верхние и нижние грани множеств.

   3.1. $\{0{,}1;\ 0{,}011;\ 0{,}00111,\ \ldots\}$ 3.2. $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\ :\ n \in N\right\}$
4. Приведите пример множества имеющего верхнюю грань и не имеющего наименьшего элемента
5. Приведите определение функции.
6. Среди кривых, приведенных на рисунках, выберите те, которые являются графиками функций.
7. Приведите пример предела последовательности.
8. Приведите примеры последовательностей, имеющих конечный предел, имеющих бесконечный предел, не имеющих предела.
9. Приведите определение предела функции в точке.
10. Приведите примеры функций, имеющих конечный предел, имеющих бесконечный предел, не имеющих предела в заданной точке.
11. Приведите определение непрерывной функции.
12. Приведите примеры разрывных функций, имеющих точки разрыва различных типов.

Дифференцирование одномерных функций. Экстремум одномерной функции. Интегрирование одномерных функций

1. Приведите определение дифференцируемости функции в точке и производной функции в точке.
2. Укажите связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Приведите необходимые примеры.
3. Определите, является ли функции $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sign} x$ и $f(x) = x \cdot \operatorname{sign} x$ дифференцируемыми в точке $x = 0$.
4. Найдите производные функции

4.1. $f(x)=\cos^2\left(12x+\frac{\pi}{12}\right)$ 4.2. $f(x)=e^{2(x+1)^2}$.

5. Приведите определение точек локального максимума и точек локального минимума функции.
6. Приведите примеры точек локального максимума и точек локального минимума функции. Покажите геометрическую интерпретацию.
7. Приведите примеры функций, не имеющих локальных экстремумов.
8. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
9. Сформулируйте достаточное условие экстремума.
10. Найдите точки экстремума функции f

 10.1. $f(x)=x^2(x-1)$ 10.2. $f(x)=x\cdot|x-1|$ 10.3. $f(x)=|x|e^{-x}$.

11. найдите наибольше и наименьшее значение функции f на промежутке Δ

 11.1. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^4-1,\ \Delta=[-1;1]$ 11.2. $f(x)=x\cdot e^{-x},\quad \Delta=[-1;1]$

12. Сформулируйте определение интеграла Римана по отрезку.
13. Укажите классы интегрируемых функций.
14. Приведите пример неинтегрируемой функции.
15. Сформулируйте определение первообразной функции.
16. Найдите первообразную F для функции $f(x)=\operatorname{sign} x$, такую, что $F(0)=0$.
17. Приведите формулу разложения Рациональной дроби на элементарные.
18. Найдите неопределенные интегралы.

 18.1. $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$ 18.2. $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$ 18.3. $\int\frac{dx}{x^3-1}$

19. Найдите определенные интегралы.

 19.1. $\int_1^2\frac{\lg x}{x^2}dx$ 19.2. $\int_0^\pi x^2\cos x dx$ 19.3. $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$

20. Приведите определения числового ряда, сходящегося числового ряда. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов.
21. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда. Является ли необходимое условие сходимости достаточным. Приведите примеры.
22. Сформулируйте достаточные признаки сходимости положительных рядов. Являются ли достаточные условия сходимости необходимыми.
23. Сформулируйте определения абсолютно сходящегося числового ряда, условно сходящегося числового ряда. Приведите примеры.
24. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с произвольными членами. Приведите примеры, показывающие, что все условия теорем являются существенными.
25. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости.
26. Сформулируйте определение знакочередующегося сходящегося числового ряда, признаки сходимости. Приведите примеры,

показывающие, что все условия теорем являются существенными.

27. Сформулируйте определение функциональной последовательности, определения поточечной сходимости, области сходимости, предельной функции.
28. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной последовательности.
29. Сформулируйте достаточные условия непрерывности предельной функции. Являются ли достаточные условия необходимыми? Может ли последовательность непрерывных функций сходиться равномерно к разрывной функции.
30. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости предельной функции. Являются ли достаточные условия необходимыми?
31. Сформулируйте определение функционального ряда, определения поточечной сходимости, области сходимости, суммы ряда.
32. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной ряда.
33. Сформулируйте достаточные условия непрерывности суммы ряда. Являются ли достаточные условия необходимыми?
34. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости суммы ряда. Являются ли достаточные условия необходимыми?
35. Сформулируйте определение степенного ряда, опишите структуру области сходимости, характер сходимости.
36. Приведите способы отыскания радиуса сходимости степенного ряда.
37. Сформулируйте определения рядов Тейлора, Маклорена.
38. Сформулируйте достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.
39. Получите разложения в степенной ряд основных элементарных функций, укажите области сходимости полученных рядов.

IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции **ОПК-2** – способностью корректно применять при решении профессиональных задач аппарат математического анализа, геометрии, алгебры, дискретной математики, математической логики, теории алгоритмов, теории вероятностей, математической статистики, теория информации, теоретико-числовых методов.

Этап формирования	Типовые	Показатели и критерии оценивания

компетенции, в котором участвует дисциплина	контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	компетенции, шкала оценивания
Владеть	Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \cos x \cdot e^x$. Исследовать графически поведение функции и частичных сумм ряда Тейлора $T_n(x)$ порядка n = 1, 3, 4.	*Критерии оценки* • *5 баллов выставляется студенту, если он аргументировал решение задачи, подтверждая знание материала и используя необходимые формулы и теоремы.* • *3 баллов, если получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки, решение обосновано.* • *2 балла, если задача решена без обоснования применения необходимых формул и теорем.*
Уметь	*1. Найдите объем тела ограниченного поверхностями* $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$. *2. Пусть* $f(x) = x \cdot \sin \pi x$. *Докажите, что для любого числа* M *найдется точка* $x_0 > M$, *такая, что* $f'(x_0) = 0$.	• *Имеется полное верное решение, включающее правильный ответ – 3 балла* • *Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки* *ИЛИ* *решение недостаточно обосновано* *ИЛИ* *В решении имеются лишние или неверные записи, не отделенные от решения – 2 балла* • *Имеется верное решение части уравнения, неравенства или задачи из-за логической ошибки – 1 балл* • *Решение не дано* *ИЛИ* *дано неверное решение – 0 баллов*
Знать	**Необходимое условие сходимости ряда** а) Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. б) Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. в) Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	*Правильный ответ – 1балл.*

	сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.	

2. Текущий контроль успеваемости

Дифференцирование одномерных функций. Экстремум одномерной функции

1. Определите, будет ли функция $f(x)=\sqrt{|x|}\cdot\sin\sqrt{|x|}$ дифференцируема в точке $x=0$.
2. Найдите производную функции $f(x)=\sin^2 2\left(x^2+\dfrac{x\cdot e^{\sqrt{x}}}{ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{x}}\right)$.
3. Найдите касательные функции $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, в неподвижных точках этой функции.
4. Определите, сколько раз функция $f(x)=(x-|x|)\cdot x^2$ дифференцируема в точке $x=0$.
5. Пусть $f(x)=x\cdot\sin\pi x$. Докажите, что для любого числа M найдется точка $x_0>M$, такая, что $f'(x_0)=0$.
6. Найдите пределы 6.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(e^{x-1}-\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln x-x+1}$. 6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin^2 x}{\ln(1+x)-x^2}$
7. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x)=|x-1|e^{-|x-1|}$.
8. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ на отрезке $[2;4]$.
9. Найдите равнобедренный треугольник наибольшей площади, вписанный в окружность заданного радиуса
10. Докажите неравенство $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$, $x>1$. Приведите геометрическую иллюстрацию.
11. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функции $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.
12. Найдите вторую производную функции $f(x)=x^3+\mathrm{arctg}\,x$.

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

1. Найдите интегралы.

1.1. $\int(x-1)(2x+3)^{12}dx$ 1.2. $\int\dfrac{(x^2-2x+2)\ln(x+1)+2x}{x^2-2x+2}dx$.

1.3. $\int\dfrac{2x^3-2x^2+4x}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}dx$. 1.4. $\int x\cdot\sin 3x\,dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

1.6. $\int \frac{e^{2x+1}}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

1.7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

1.7. $\int\limits_{-3}^{1} x\sqrt{\frac{3+x}{2}}dx$.

1.8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sin x + \cos^2 x}dx$

1.9. $\int\limits_{0}^{1}\left(x^3 + e^{\frac{x}{10}} - \sin\frac{\pi}{6}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)dx$

1.10. $\int\limits_{0}^{0,5}(2x-1)\cdot e^{4x^2-4x+1}dx$

1.11. $\int\limits_{1}^{e}\ln 2x \cdot dx$

1.12. $\int\limits_{-1}^{0} x^3\sqrt{1-x^2}dx$

Несобственный интеграл. Приложения интеграла

1. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=\sin 2x$ и $y=\frac{4}{\pi}x$
2. Найдите длину кривой $x=2t^2, \quad y=\frac{4}{3}t^3, \quad t\in[0;2]$
3. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл.

3.1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln\frac{x^2+1}{x^2}dx$. 3.2. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos\pi x}{\sqrt{x}}dx$. 3.3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt[6]{x^3+x^4}}{x}dx$.

Числовые ряды

1. Исследуйте на сходимость ряд.

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$ 1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5+3}}$ 1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}$ 1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+3^n}$

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{n^2-1}{\sqrt{n^4+1}}\right)$. 1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$. 1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{\pi}{2n}$.

Функциональные и степенные ряды

1. Исследуйте функциональную последовательность $\{f_n\}$ на сходимость и равномерную сходимость на множестве A.

1.1. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$, $A=[0;1]$. 1.2. $f_n(x)=\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$, $A=(0;+\infty)$.

2. Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд на множестве A.

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $A=(0;+\infty)$. 2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)}$, $A=(0;+\infty)$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{arctg} x}{n+x^2}$, $A=(-\infty;+\infty)$. 2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\cos nx$, $A=[0;\pi]$.

3. Найдите радиус интервал и область сходимости степенного ряда.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.   3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)}x^n$.

4. Функцию f разложите в ряд Маклорена и найдите область сходимости этого ряда.

4.1. $f(x)=e^{-x^2}$.   4.2. $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$.   4.3. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

5. Найдите сумму ряда

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.   5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных

1. Найдите $\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=\begin{cases} z\cdot\sin\frac{1}{z}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$

2. Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=x^{x\cdot\ln yz}$

3. Найдите $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ для функции $f(x,y,z)=e^{xyz}\cdot\cos x$

4. Найдите $df\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ и $d^2f\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ для функции $f(x,y,z)=z\cdot\sin xy+\frac{1}{y}\cdot\cos xz$

5. Найдите касательную плоскость к функции $f(x,y)=1+x^2-y^2$, параллельную плоскости $p(x,y)=1-x+y$

6. Найдите точки локального экстремума функции

6.1 $f(x,y,z)=xy^2(1-x-y-z)$ 6.2 $f(x,y)=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$

7. Найдите точки условного экстремума функции f, при заданных ограничениях.

7.1. $f(x,y,z)=xy^2$, $x+y=z$

7.2. $f(x,y,z)=xy+z$, $x^2+y^2=2$, $x+y+z=3$.

2. Двойные и тройные интегралы, их приложения.

1. Найдите двойной интеграл по области *G,* ограниченной указанными линиями

1.1. $\iint\limits_G \cos(x-y)\,dxdy,\ \ x=y,\ x=0,\ y=\pi$

1.2. $\iint\limits_G xydxdy, \;\; x = y, \; x = 1, \; y = 0$

1.3 $\iint\limits_G e^{2x-y}dxdy, \;\; 2x = y, \; 2x = y + 1, \; y = 0, \; y = 1$

1.4. $\iint\limits_G \frac{2y}{x}dxdy, \;\; x^2 = y, \; 2x = y, \; x = 1, \; x = 2$

2. Найдите тройной интеграл по области G, ограниченной указанными поверхностями

2.1. $\iiint\limits_G xdxdydz, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 1, x + y + z = 2$

2.2. $\iiint\limits_G \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2}dxdydz, \;\; x = \frac{1}{2}, y = 0, \; z = 0, \; x^2 + y^2 = 1, \; z = x^2 + y^2$

2.3. $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz, \;\; x = 0, \; z = 0, z = 1, \; x^2 + y^2 = 1, \;\; (x \geq 0)$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

3.1. $4y = x^2 - 4x, \quad x = y + 3$

3.2.. $x = 2y, \quad y = 3x, \quad 3x = 2 - y, \quad x = 4 - 2y$

4. Найдите объем тела ограниченного поверхностями

4.1. $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0$

3. Криволинейные интегралы.

1. Найдите криволинейные интегралы

1.1. $\int\limits_l (2x + y)ds, \; l = ABOA, \; A = (1,0), \; B = (0,2), \; O = (0,0)$

1.2. $\int\limits_l \sqrt{y}ds, \;\; l : \; x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t), \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$

1.3. $\int\limits_l ydx - xdy, \;\; l : \; y = x^3, \;\; 0 \leq x \leq 2$

1.4. $\int\limits_l (x - y)dx - (x + y)dy, \quad l$ – произвольный путь, соединяющий точки

$A = (2,-1), \; B = (1,0)$

2. Используя формулу Грина, найдите интеграл

$\int\limits_{\partial G} e^x(1 - \cos y)dx - e^x(y - \sin y)dy, \;\; G = \{(x, y) \; : \; x \in [0, \pi], \;\; 0 \leq y \leq \sin x\}$

3. Промежуточная аттестация

Вопросы к экзамену

1 семестр

1. Множества. Подмножества. Примеры. Теоретико-множественные операции с множествами: объединение, пересечение, разность множеств.
2. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли.
3. Бином Ньютона.
4. Понятие десятичной дроби и действительного числа. Конечные десятичные дроби. Рациональные и иррациональные числа.
5. Ограниченные множества. Верхние и нижние грани. Примеры. Свойства. Теоремы о существовании верхней и нижней грани.
6. Признаки верхней и нижней грани.
7. Принцип Кантора. Принцип Бореля–Лебега.
8. Понятие функции. Примеры. Значение функции в точке. Область определения и множество значений функции. График функции. Различные способы задания функции.
9. Образ и прообраз множества при отображении. Примеры. Свойства.
10. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры.
11. Композиция функций. Примеры.
12. Понятие обратной функции. Примеры.
13. Условия существования обратной функции.
14. Числовые функции. Ограниченные функции. Монотонные функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Примеры. Свойства.
15. Элементарные функции. Классификация элементарных функций.
16. Функции, заданные параметрически, и функции, заданные неявно.
17. Понятие последовательности. Подпоследовательность. Примеры.
18. Понятие предела числовой последовательности. Примеры.
19. Основные свойства числовых последовательностей. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Сходимость подпоследовательности.
20. Предел числовой последовательности и арифметические операции. Неопределенности.
21. Предельный переход в неравенствах.
22. Теорема о пределе промежуточной последовательности.

23. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.

24. Число e как верхняя грань и как предел.

25. Существование монотонной подпоследовательности у произвольной последовательности. Принцип Больцано–Вейерштрасса.

26. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

27. Бесконечно малые последовательности. Предел произведения бесконечно малой и ограниченной последовательности.

28. Понятие предельной точки множества. Примеры. Характеризация предельной точки множества в терминах последовательностей элементов множества

29. Понятие предела функции в точке. Эквивалентные определения.

30. Односторонние пределы. Теорема о существовании предела функции в терминах односторонних пределов.

31. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.

32. Основные свойства предела функции в точке. Единственность предела. Локальная ограниченность функции имеющей конечный предел в точке.

33. Предел функции в точке и арифметические операции. Неопределенности при вычислении пределов. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной функции.

34. Теорема о пределе сложной функции.

35. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

36. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

37. Эталонные пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$,

38. Эталонные пределы: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\cdot\log_a x=0$.

39. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Эквивалентные функции. O–символика. Примеры. Свойства.

40. Понятие непрерывной функции в точке. Эквивалентные определения. Примеры.

41. Односторонняя непрерывность. Примеры. Условие непрерывности в терминах односторонней. Классификация точек разрыва функции.

42. Непрерывность функции в точке и арифметические операции. Непрерывность композиции непрерывных функций.

43. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.
44. Теоремы об обращении непрерывной функции в нуль и о промежуточных значениях непрерывной функции.
45. Теорема о непрерывности обратной функции.
46. Понятие дифференцируемой функции и производной функции в точке. Примеры. Производные базисных элементарных функций
47. Односторонние производные. Примеры. Условия дифференцируемости в терминах односторонних производных.
48. Условие дифференцируемости функции в точке в терминах приращения. Дифференциал.
49. Дифференцируемость композиции дифференцируемых функций.
50. Дифференцируемость и арифметические операции. Производные
51. Дифференцируемость обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций
52. Геометрический смысл производной.
53. Понятие экстремума функции. Теорема Ферма.
54. Теорема Ролля.
55. Теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях.
56. Необходимые и достаточные условия экстремума.

2 семестр

1. Правила Лопиталя.
2. Производные высших порядков.
3. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме.
4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши.
5. Формула Тейлора для функций $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. Сходимость остаточного члена.
6. Формула Тейлора для функций $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)=(1+x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Коши. Сходимость остаточного члена.
7. Локальная формула Тейлора. Локальная формула Тейлора для базисных элементарных функций.
8. Достаточные условия экстремума в терминах высших производных.
9. Понятия выпуклой и вогнутой функции. Геометрическая интерпретация. Непрерывность и односторонняя дифференцируемость выпуклой и вогнутой функции.
10. Условия выпуклости и вогнутости функции в терминах первой и второй производной.
11. Условия выпуклости и вогнутости функции в терминах полукасательных и касательных. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия.
12. Понятие интеграла Римана. Примеры интегрируемой и неинтегрируемой по Риману функции.

13. Критерий интегрируемости в терминах частных сумм. Критерий Лебега интегрируемости функции.
14. Интегрируемость монотонной, кусочно-монотонной, непрерывной и кусочно-непрерывной функции.
15. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функции. Интегрируемость модуля интегрируемой функции и произведения интегрируемых функций.
16. Свойства линейности и аддитивности интеграла Римана.
17. Свойство монотонности интеграла Римана. Оценка модуля интеграла.
18. Независимость интеграла от значений функции в конечном числе точек.
19. Теорема о существовании первообразной.
20. Понятие первообразной. Формула Ньютона – Лейбница.
21. Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Свойство линейности неопределенного интеграла.
22. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
23. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
24. Интегрирование рациональных функций.
25. Интегрирование иррациональных функций.
26. Интегрирование тригонометрических функций.
27. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Примеры.
28. Теорема о среднем значении для интеграла Римана и следствия из нее.
29. Понятие кривой. Вычисление длины кривой.
30. Вычисление площади криволинейной трапеции и объема тела вращения.
31. Несобственного интеграла. Основные свойства. Интегралы: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p} dx$.
32. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
33. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов. Примеры
34. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
35. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов. Примеры.
36. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Примеры.
37. Понятие числового ряда и сходимости ряда. Примеры. Гармонический ряд.
38. Необходимое условие сходимости числового ряда. Сходимость остатка ряда.
39. Критерий Коши сходимости числового ряда. Абсолютная сходимость.
40. Лемма Коши о разрежении ряда. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

41. Признаки сравнения сходимости положительного числового ряда.
42. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительного ряда. Примеры.
43. Интегральный признак сходимости положительного ряда
44. Абсолютная сходимость ряда. Признаки Абеля и Дирихле сходимости ряда с произвольными членами. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.
45. Умножение рядов.
46. Группировка членов ряда. Перестановка членов ряда. Теорема Римана.

3 семестр

1. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры.
2. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Признак равномерной сходимости функциональной последовательности.
3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
4. Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда.
5. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда
6. Теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности и функционального ряда.
7. Понятие степенного ряда. Теорема Коши–Адамара. Радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда.
8. Теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда.
9. Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
10. Теорема об отыскание коэффициентов степенного ряда по его сумме.
11. Ряд Тейлора. Условие сходимости ряда Тейлора. Разложение в ряд Тейлора базисных элементарных функций. Понятие тригонометрического ряда. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда.
12. Понятие ряда Фурье. Коэффициенты Фурье. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье.
13. Неравенство Бесселя. Сходимость к нулю коэффициентов Фурье.
14. Ядро Дирихле. Свойства. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье.
15. Принцип локализации.
16. Признаки Дирихле сходимости ряда Фурье в точке.

17. Суммы Фейера. Равномерная сходимость последовательности сумм Фейера непрерывной функции. Равенство Парсеваля
18. Интеграл Фурье. Признаки сходимости.
19. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка.
20. Пространство R^n. Неравенство Коши – Буняковского.
21. Открытые и замкнутые множества. Внутренность и замыкание множества. Предельные точки. Сходимость последовательности.
22. Понятие функции многих переменных. График функции $f: R^2 \to R$. Примеры.
23. Предел и непрерывность функции многих переменных. Эквивалентные определения. Примеры.
24. Свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции.
25. Теорема Вейерштрасса.
26. Понятие дифференцируемой функции $f: R^m \to R$. Градиент. Дифференциал. Примеры.
27. Условие дифференцируемости в терминах приращений. Непрерывность дифференцируемой функции.
28. Частные производные функции. Правило вычисления. Примеры.
29. Пример функции, имеющей в точке все частные производные, но не дифференцируемой в этой точке.
30. Теорема о дифференцируемости функции в случае непрерывности частных производных.
31. Дифференцирование сложной функции.
32. Геометрическая интерпретация градиента. Касательная плоскость и нормаль.
33. Производная по направлению.
34. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Примеры. Формальная запись дифференциалов высших порядков.
35. Формула Тейлора.

4 семестр

1. Локальный экстремум функции $f: R^m \to R$. Примеры. Необходимые условия экстремума.
2. Достаточные условия экстремума для функции $f: R^m \to R$ и $f: R^2 \to R$.
3. Понятие дифференцируемой функции $f: R^m \to R^n$. Условие дифференцируемости в терминах приращений. Непрерывность дифференцируемой функции.
4. Теорема о структуре матрицы оператора производной.
5. Дифференцируемость функции $f: R^m \to R^n$ в случае непрерывности частных производных координатных функций.
6. Дифференцируемость композиции.

7. Теоремы о конечных приращениях.
8. Непрерывно дифференцируемые функции $f: R^m \to R^n$. Условия непрерывной дифференцируемости.
9. Теорема об обратной функции.
10. Понятие неявной функции. Примеры. Теорема о неявной функции.
11. Правило дифференцирования неявных функций. Теорема о системе неявных функций.
12. Понятие условного экстремума. Примеры.
13. Необходимые условия условного экстремума.
14. Функция Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума.
15. Измеримые по Жордану множества. Мера Жордана. Примеры множеств не измеримых по Жордану. Критерий измеримости.
16. Понятие двойного интеграла. Критерий интегрируемости в терминах интегральных сумм.
17. Критерий Лебега интегрируемости многомерной функции. Интегрируемость непрерывной функции.
18. Свойства интеграла. Линейность. Монотонность. Аддитивность. Оценка модуля интеграла.
19. Теорема Фубини. Вычисление двойных интегралов.
20. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.
21. Переход к полярным координатам в качестве замены переменных.
22. Тройные интегралы. Вычисление. Свойства.
23. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам.
24. Многомерные интегралы
25. Естественная параметризация кривой. Ориентация кривой.
26. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Свойства. Вычисление сведением к определенному интегралу.
27. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода и определенным интегралом.
28. Формула Грина.
29. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
30. Приложения криволинейных интегралов.

Пример теста

1. Заданы множества A={2,3,4,5} и D={3,4,5}. Верным для них будет утверждение:

1) множество A - подмножество множества D;
2) множество D - подмножество множества A;
3) множество A и множество D равны.

2. Если отношение задано неравенством: 3x-4y<0, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел?

1) (0;1); 2) (3;1); 3) (2;0); 4) (3, 2).

3. На факультете учатся студенты, имеющие домашний персональный компьютер и студенты, не имеющие домашнего персонального компьютера. Пусть А - множество всех студентов факультета; В - множество студентов факультета, имеющих домашний персональный компьютер. Тогда разностью А\В этих множеств будет

1) множество студентов факультета, не имеющих домашнего персонального компьютера;

2) множество студентов факультета, имеющих домашний персональный компьютер;

3) все множество студентов факультета.

4. Если А - множество четных натуральных чисел, а В={11, 22, 33, 44, 55, 66, 77}, то количество элементов множества $A \cap B$ равно

1) 7; 2) 3; 3) 5; 4) 10.

5. Пусть множество М=(-1;1) представляет собой интервал, а множество N=[-1;0) - отрезок числовой оси, тогда множество $K=M \cup N$, как числовой промежуток будет равно

Варианты ответов:

1) K=[-1, 1]; 2) K=(-1,0] ; 3) K=(-1,0); 4) K=(-1, 1).

6. Понятие функции

1. Пусть **X**, **Y** – числовые множества. Если существует правило *f*, по которому каждому $x \in \mathbf{X}$ ставится в соответствие единственное число $y \in \mathbf{Y}$, то говорят, что на множестве **X** задана функция $y = f(x)$ со множеством значений в **Y**.
2. Пусть **X**, **Y** – числовые множества. Если существует правило *f*, по которому каждому $y \in \mathbf{Y}$ ставится в соответствие единственное число $x \in \mathbf{X}$, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ со множеством значений в Y.
3. Пусть **X**, **Y** – числовые множества. Если существует правило *f*, по которому каждому $x \in \mathbf{X}$ ставится в соответствие число $y \in \mathbf{Y}$, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ со множеством значений в **Y**.

7. Предел последовательности

1. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если существуют $\varepsilon > 0$ и натуральное число N, такие что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.
2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$.
3. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

8. Понятие производной

1. Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется значение предела $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

2. Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется значение предела $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$.
3. Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется значение предела $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

9. Производная произведения

1. $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
2. $(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)+f(x)g(x)$.
3. $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$.

10. Критическая точка функции

1. Точка x_0 называется критической точкой функции $y=f(x)$, если $f'(x_0)\neq 0$.
2. Точка x_0 называется критической точкой функции $y=f(x)$, если $f'(x_0)<0$.
3. Точка x_0 называется критической точкой функции $y=f(x)$, если $f'(x_0)=0$.

11. Признаки возрастания функции

1. Функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$, если $f'(x)>0$ для всех $x\in(a;b)$.
2. Функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$, если $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;b)$.
3. Функция $y=f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$, если $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;b)$.

12. Достаточные условия минимума

1. Функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, если $f'(x_0)<0$ и $f''(x_0)>0$.
2. Функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, если $f'(x_0)<0$ и $f''(x_0)<0$.
3. Функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$.

13. Понятие неопределённого интеграла

1. Под неопределённым интегралом $\int f(x)dx$ функции $y=f(x)$ понимают совокупность всех её производных.
2. Под неопределённым интегралом $\int f(x)dx$ функции $y=f(x)$ понимают совокупность всех её производных и первообразных.
3. Под неопределённым интегралом $\int f(x)dx$ функции $y=f(x)$ понимают совокупность всех её первообразных.

14. Формула интегрирования по частям

1. $\int u dv = \int v du - uv$.
2. $\int u dv = uv - \int v du$.
3. $\int u dv = uv + \int v du$.

15. Формула Ньютона-Лейбница

1. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, где $y = F(x)$ – первообразная функции $y = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $y = F(x)$ – первообразная функции $y = f(x)$.
3. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $y = F(x)$ – производная функции $y = f(x)$.

16. Вычисление площади плоской фигуры

1. Пусть $f(x) < g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = f(x), y = g(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, будет равна: $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$.
2. Пусть $f(x) < g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = f(x), y = g(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, будет равна: $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.
3. Пусть $f(x) < g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = f(x), y = g(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, будет равна: $S = \int_a^b (g(x) + f(x))dx$.

17. Частичная сумма числового ряда

1. Сумма $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$ последних k членов ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется k-ой частичной суммой ряда и обозначается S_k, т.е. $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.
2. Сумма $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$ некоторых k членов ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется k-ой частичной суммой ряда и обозначается S_k, т.е. $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.
3. Сумма $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$ первых k членов ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется k-ой частичной суммой ряда и обозначается S_k, т.е. $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.

18. Необходимое условие сходимости ряда

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

19. Признак Даламбера сходимости ряда

1. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.
2. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда ряд сходится при $q > 1$ и расходится при $q < 1$.
3. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда ряд сходится при $q > 1$ и расходится при $q > 1$.

20. Степенной ряд

1. Функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin x^n$, где $\{a_n\}$ – числовая последовательность, называется степенным рядом.
2. Функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $\{a_n\}$ – числовая последовательность, называется степенным рядом.

Функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $\{a_n\}$ – функциональная последовательность, называется степенным рядом.

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) Основная литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154399
2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 — 2020. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-4866-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/126708
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с.

— ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149365
4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник / И. И. Привалов. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-0913-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167779

б) дополнительная литература

1. Рощенко, О. Е. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / О. Е. Рощенко, Е. А. Лебедева. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. — 76 c. — ISBN 978-5-7782-3944-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/98715.html
2. Жукова, Г. С. Математический анализ в примерах и задачах. Часть 1 : учебное пособие / Г. С. Жукова, М. Ф. Рушайло. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 260 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015963-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072156
3. Кутузов, А. С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : [16+] / А. С. Кутузов. – 2-е изд. стер. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2017. – 127 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166
4. Шершнев, В. Г. Математический анализ: сборник задач с решениями : учеб. пособие / В.Г. Шершнев. — Москва : ИНФРА-М, 2018. — 164 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). ISBN 978-5-16-005487-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/958345
5. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е. С. Половинкин. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 254 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-013608-0. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1125614
6. Ахтамова, С. С. Теория функций комплексного переменного : учебно-методическое пособие / С. С. Ахтамова, Е.К. Лейнартас, А. П. Ляпин. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. - 100 с. - ISBN 978-5-7638-4330-9. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1816573
7. Богомолова, Е. В. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / Е. В. Богомолова. — Дубна : Государственный университет «Дубна», 2018. — 107 c. — ISBN 978-5-89847-540-6. — Текст :

электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154470
8. Пономарев, А. В. Теория функций комплексного переменного : методические указания / А. В. Пономарев, И. Э. Бессарабская. — Москва : РТУ МИРЭА, 2019. — 46 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/171497
9. Нахман, А. Д. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / А. Д. Нахман. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 212 c. — ISBN 978-5-4486-0597-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/80317.html

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. ЭБС Лань https://e.lanbook.com/ Договор № 4-е/23 от 02.08.2023 г.
2. ЭБС Znanium.com https://znanium.com/ Договор № 1106 эбс от 02.08.2023 г.
3. ЭБС Университетская библиотека online https://biblioclub.ru Договор № 02-06/2023 от 02.08.2023 г.
4. ЭБС ЮРАЙТ https://urait.ru/ Договор № 5-е/23 от 02.08.2023 г.
5. ЭБС IPR SMART https://www.iprbookshop.ru/ Договор № 3-е/23К от 02.08.2023 г.
6. https://cyberleninka.ru/ научная электронная библиотека «Киберленинка».
7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp;
8. Репозитарий ТвГУ http://eprints.tversu.ru

VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине (модулю) перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление глоссария. В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

5. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

6. Подготовка к экзамену. При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе лекций. Экзамен студенты могут сдавать в виде теста, контрольной работы или устного ответа по вопросам, представленным в данной программе. Для получения положительной оценки на экзамене необходимо продемонстрировать знания, не ниже базового (минимального) уровня.

Процедура оценивания знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности обучающихся по дисциплине (модулю) производится в рамках балльно-рейтинговой системы, включая рубежную и текущую аттестации.

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины (модуля) установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.
- Сроки проведения рейтингового контроля:

осенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 9-10 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

весенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится на 32-33 учебной неделе по графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

Максимальное количество баллов, которое может быть получено в результате освоения дисциплины составляет 100 баллов, из них 60 баллов отводится на текущий контроль (например, по 30 баллов на каждый модуль) и 40 баллов на промежуточную аттестацию.

Максимальная сумма рейтинговых баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся *зачетом /экзаменом*, по итогам **промежуточной аттестации** в форме теста составляет 40 баллов, при этом начисление баллов производится следующим образом:

Самостоятельно выполнено верно 85 - 100 % заданий – 40 баллов;

Самостоятельно выполнено верно 75 - 84% заданий – 30 баллов;

Самостоятельно выполнено верно 50 - 74% заданий – 20 баллов;

Выполнено верно менее 50% заданий – 0 баллов.

VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой во время лекций, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий. Лекционные занятия включают элементы мастер-класса специалиста, имеющего в данной области учёную степень и являющегося экспертом в ней. В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки реализация компетентностного подхода предусмотрено широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерных симуляций, разбор конкретных моделей) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатно
Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows	Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Lazarus	бесплатно
OpenOffice	бесплатно
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО	бесплатно
ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО	бесплатно

IX. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение данной дисциплины: лекционная аудитория, аудитория для проведения практических занятий с мультимедийными средствами, компьютерный класс для организации самостоятельной работы и выполнения курсовой работы.

X. Перечень обновлений рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.			
2.			
3.			