Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:
Руководитель ООП:
____
«__»_________2021г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Математический анализ

Направление подготовки
09.03.03 – Прикладная информатика

Профиль подготовки
Прикладная информатика в мехатронике

Для студентов 1,2 курсов
очной формы обучения

Составитель: к.т.н., доцент Г.А. Михно

Тверь, 2021

I. Аннотация

1. Цели и задачи дисциплины

Преподавание дисциплины «Математический анализ» имеет следующие цели и задачи:

- ознакомить студентов с теоретическими и практическими основами математического анализа;
- развить логическое и алгоритмическое мышление;
- привить студентам умение самостоятельно изучать литературу по математическому анализу;
- выработать у студентов навыки к абстрагированию и строгому изложению мыслей.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина относится к обязательной части раздела «Математический» учебного плана.

Дисциплина требует знаний и умений, формируемых в результате освоения школьной программы по элементарной математике, и необходима как предшествующая для следующих дисциплин, изучаемых в разделах «Математический» (теория вероятностей и математическая статистика; численные методы; дифференциальные уравнения; теория неопределенности и нечеткая логика; методы оптимизации и исследование операций), «Дисциплины профиля подготовки» (теория систем и системный анализ; имитационное моделирование; статистика и анализ данных; эконометрика; оптимизационные задачи управляемых процессов в экономике; математическое моделирование процессов и систем).

3. Объем дисциплины: 16 зачетных единиц, 576 академических часов, **в том числе:**

контактная аудиторная работа: лекции 138 часов, практические занятия 138 часов;

контактная внеаудиторная работа: контроль самостоятельной работы 10, в том числе курсовая работа 10;

самостоятельная работа: 290 часов, в том числе контроль 104.

4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности ОПК	ОПК-1.1 Демонстрирует знания основ математики, физики, вычислительной техники и программирования ОПК-1.2 Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования ОПК-1.3 Демонстрирует навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности

5. Форма промежуточной аттестации

1-й семестр: экзамен;

2-й семестр: экзамен;

3-й семестр: курсовые работы, экзамен.

6. Язык преподавания русский**.**

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)			Самостоятельная работа, в том числе
		Лекции	Практические занятия	Контроль самостоятельно	

		всего	в т.ч. практическая подготовка	всего	в т.ч. практическая подготовка	й работы (в том числе курсовая работа)	Контроль (час.)
Первый семестр							
1. Введение в анализ 1.1 – 1.7	23	5		5		-	13
2. Предел последовательности 2.1 – 2.6	38	9		9		-	20
3. Предел функции 3.1 – 3.5	38	11		11			16
4. Непрерывность функции 4.1 – 4.13	30	8		8			14
5. Производная и дифференциал 5.1 – 5.14	41	12		12			17
ВСЕГО	170	45		45			80
Второй семестр							
1.Производная и дифференциал 5.15 – 5.21	26	4		4			18
2. Неопределенный интеграл 6.1 – 6.5	39	10		10			19
3. Определенный интеграл 7.1 – 7.11	35	8		8			19
4. Несобственные интегралы 8.1 – 8.5	30	6		6			18
5. Числовые ряды 9.1 – 9.4	39	10		10			19
6. Функциональные последовательности и ряды 10.1 – 10.9	39	10		10			19
ВСЕГО	208	48		48			112
Третий семестр							
1. Функции нескольких переменных 1.1 – 1.23	96	21		21		5	49

2. Кратные интегралы 2.1 – 2.12	102	24		24		5	49
ВСЕГО	198	45		45		10	98
ИТОГО	**576**	**138**	**-**	**138**	**-**	**10**	**290**

Учебная программа:

Первый семестр

1. Введение в анализ.

1.1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображение, функция. Сюръективные, инъективные, биективные отображения. Обратное отображение. Суперпозиция отображений.

1.2. Эквивалентность множеств. Счетные множества и их свойства. Счетность множества рациональных чисел.

1.3. Несчетность множества точек интервала (0,1). Множества мощности континуума. Теорема Кантора – Бернштейна (без доказательства). Мощность множества всех подмножеств непустого множества.

1.4. Вещественные числа. Десятичная запись вещественного числа. Свойства вещественных чисел. Аксиома Архимеда. Свойство непрерывности.

1.5. Верхняя и нижняя грани числового множества, их характеристические свойства. Теорема о существовании верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) числового множества.

1.6. Ограниченные отображения, верхняя и нижняя грани отображения.

1.7. Понятие метрического и нормированного пространств. Замкнутый, открытый шар в метрическом пространстве. Примеры.

2. Предел последовательности.

2.1. Предел последовательности в метрическом пространстве. Фундаментальная последовательность, полное метрическое пространство.

2.2. Предел числовой последовательности, теорема о единственности предела числовой последовательности.

2.3. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности, их свойства. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

2.4. Предельный переход в неравенствах. Теорема о существовании предела у ограниченной монотонной последовательности. Число «е».

2.5. Теорема Больцано – Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной числовой последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.

2.6. Критерий Коши сходимости последовательности.

3. Предел функции.

3.1. Предел функции в точке по Гейне и по Коши; эквивалентность этих определений. Односторонние пределы в точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел.

3.2. Критерий Коши существования предела функции в точке.

3.3. Замечательные пределы.

3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, теоремы о них. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.

3.5. Теорема о пределе сложной функции.

4. Непрерывность функции.

4.1. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Арифметические операции над непрерывными функциями.

4.2. Свойство устойчивости знака непрерывной в точке функции.

4.3. Свойство локальной ограниченности непрерывной в точке функции.

4.4. Непрерывность элементарных функций.

4.5. Точки разрыва функции и их классификация. Теорема о точках разрыва монотонной на отрезке функции.

4.6. Первая теорема Коши (о прохождении непрерывной функции через нуль при смене знаков).

4.7. Вторая теорема Коши (о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции).

4.8. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции).

4.9. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении верхней и нижней граней непрерывной на отрезке функцией).

4.10. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

4.11. Свойства открытых и замкнутых множеств. Компакт.

4.12. Лемма Бореля о конечном покрытии компакта открытыми множествами. Эквивалентность двух определений компакта.

4.13. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте (обобщение теоремы Кантора).

5. Производная и дифференциал.

5.1. Производная, ее геометрический смысл. Односторонние производные.

5.2. Непрерывность функции, дифференцируемой в точке.

5.3. Производная суммы, произведения и частного двух функций.

5.4. Производная сложной и обратной функций. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

5.5. Производные элементарных функций.

5.6. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

5.7. Дифференциал функции, геометрический смысл дифференциала. Правила вычисления дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

5.8. Дифференциалы высших порядков.

5.9. Лемма Дарбу о возрастании или убывании функции в точке.

5.10. Теорема Ферма о локальном экстремуме функции.

5.11. Теорема Ролля о нуле производной.

5.12. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений). Теорема о точках разрыва производной на интервале (без доказательства).

5.13. Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений).
5.14. Первое и второе правило Лопиталя.

Второй семестр

5.15. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

5.16. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

5.17. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.

5.18. Необходимое и три достаточных условия локального экстремума.

5.19. Выпуклость графика функции. Достаточное условие выпуклости графика функции.

5.20. Необходимое и три достаточных условия точки перегиба.

5.21. Асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

6. Неопределенный интеграл.

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов.

6.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

6.3. Интегрирование рациональных дробей.

6.4. Интегрирование тригонометрических выражений, универсальная тригонометрическая подстановка.

6.5. Интегрирование простейших иррациональных функций.

7. Определенный интеграл.

7.1. Определенный интеграл Римана. Неинтегрируемость по Риману неограниченной на [а,в] функции.

7.2. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу, их основные свойства. Верхний и нижний интегралы Дарбу, их свойства. Основная лемма Дарбу.

7.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Теорема об интегрируемости монотонной функции.

7.4. Свойства определенного интеграла.

7.5. Оценка определенных интегралов. Интегрирование неравенств. Первая теорема среднего значения; вторая теорема среднего значения.

7.6. Интеграл с переменным верхним пределом. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.

7.7. Замена переменной под знаком определенного интеграла. Правило интегрирования по частям для определенного интеграла.

7.8. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.

7.9. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского для сумм и интегралов.

7.10. Интеграл Стилтьеса. Необходимое и достаточное условия интегрируемости функции по Стилтьесу. Свойства интеграла Стилтьеса. Функции ограниченной вариации.

7.11. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей; вычисление длины дуги кривой.

8. Несобственные интегралы.

8.1. Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

8.2. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

8.3. Признаки сходимости несобственных интегралов (общий и частный признаки сравнения; признак Абеля – Дирихле).

8.4. Замена переменной под знаком несобственного интеграла; интегрирование по частям несобственного интеграла.

8.5. Главное значение несобственного интеграла. Интегрируемость функции по Коши.

9. Числовые ряды.

9.1. Числовой ряд, сходимость и расходимость. Гармонический ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Арифметические действия со сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости числового ряда.

9.2. Признаки сравнения числовых рядов. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда.

9.3. Абсолютная и условная сходимость ряда. Переместительный закон для абсолютно сходящегося ряда.

9.4. Теорема Римана для условно сходящегося ряда (без доказательства). Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Признак Дирихле (без доказательства). Признак Абеля.

***10. Функциональные последовательности и ряды*.**

10.1. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость последовательностей и рядов.

10.2. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности и ряда. Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

10.3. Теорема о непрерывности суммы (предельной функции) равномерно сходящегося ряда (функциональной последовательности).

10.4. Теорема об интегрируемости суммы (предельной функции) равномерно сходящегося на [а,в] ряда (функциональной последовательности).

10.5. Теорема о дифференцируемости суммы (предельной функции) сходящегося на [а,в] ряда (функциональной последовательности).

10.6. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда. Формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

10.7. Вторая теорема Абеля.

10.8. Функция, аналитическая в точке. Единственность представления аналитической в точке функции степенным рядом. Теорема о почленном дифференцировании интегрировании степенного ряда.

10.9. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

Третий семестр

1. Функции нескольких переменных.

1.1. Предел последовательности точек пространства R. Лемма о сходимости последовательности точек в пространстве R. Лемма о фундаментальной последовательности; критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

1.2 Предел функции n переменных в точке по Гейне и по Коши; эквивалентность этих определений. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Бесконечно малые функции n переменных.

1.3. Критерий Коши существования предела функции n переменных в точке.

1.4. Повторные пределы. Теорема о существовании повторного предела.

1.5. Непрерывность функции нескольких переменных в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции.

1.6. Теорема об устойчивости знака непрерывной в точке функции. Теорема о прохождении непрерывной функцией через любое промежуточное значение.

1.7. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции, непрерывной на компакте).

1.8. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на компакте функцией своих точных граней).

1.9. Равномерная непрерывность функции нескольких переменных. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте.

1.10. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Теорема о существовании частных производных дифференцируемой в точке функции.

1.11. Непрерывность дифференцируемой в точке функции. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке. Дифференциал функции нескольких переменных.

1.12. Дифференцирование сложной функции. Однородные функции степени p. Теорема Эйлера об однородных функциях. Инвариантность формы первого дифференциала.

1.13. Производная по направлению. Градиент. Теорема о производной функции по направлению градиента.

1.14. Частные производные высших порядков. Достаточное условие равенства смешанных производных (случай функции двух переменных и случай функции n переменных). Дифференциалы высших порядков.

1.15. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (без доказательства).

1.16. понятие локального экстремума. Необходимое условие локального экстремума.

1.17. Достаточное условие локального экстремума.

1.18. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа, необходимое условие локального экстремума.

1.19. Достаточные условия локального экстремума.

1.20. Касательная плоскость; нормальный вектор.

1.21. Понятие функции, заданной неявно. Теорема о неявной функции для случая

а) одного уравнения с двумя переменными;

в) одного уравнения с (n+1) переменной.

1.22. Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений. Теорема о существовании неявных функций, определяемых системой уравнений (без доказательства). Вычисление частных производных функций, заданных неявно системой уравнений.

1.23. Замена переменных для неявно заданных функций.

2. Кратные интегралы.

2.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности интеграла по параметру. Теорема о дифференцируемости интеграла по параметру (правило Лейбница).

2.2. Двойной интеграл. Теорема об интегрируемости непрерывной функции двух переменных (без доказательства). Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем.

2.3. Приведение двойного интеграла к повторному

а) случай прямоугольной области

б) случай произвольной области

2.4. Двойной интеграл в полярных координатах

2.5. Замена переменных в двойном интеграле

2.6. Геометрические приложения двойных интегралов:

а) вычисление площадей

б) вычисление объемов

в) вычисление площадей поверхностей

2.7. Тройной интеграл. Переход к повторному интегралу (без доказательства). Замена переменных (без доказательства); цилиндрическая и сферическая системы координат.

2.8. Криволинейный интеграл 1-го рода; его свойства.

2.9. Криволинейный интеграл 2-го рода; его свойства.

2.10. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.

2.11. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

2.12. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Теорема Гаусса – Остроградского (без доказательства).

3. Ряды Фурье.

3.1. Ортогональная тригонометрическая система. Ряд Фурье для абсолютно интегрируемой на [a,b] функции; ряд Фурье для четной и нечетной функции. Ряд Фурье в случае произвольного интервала.

3.2. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладкой функции.

3.3. Неравенство Бесселя.

3.4. Признак Дини (без доказательства).

3.5. Сходимость рядов Фурье для функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

3.6. Приближение непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

3.7. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Равенство Парсеваля. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Первый семестр		
1. Введение в анализ 1.1 – 1.7	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
2. Предел последовательности 2.1 – 2.6	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
3. Предел функции 3.1 – 3.5	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
4. Непрерывность функции 4.1 – 4.13	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
5. Производная и дифференциал 5.1 – 5.14	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
Второй семестр		
1.Производная и дифференциал 5.15 – 5.21	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.

2. Неопределенный интеграл 6.1 – 6.5	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
3. Определенный интеграл 7.1 – 7.11	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
4. Несобственные интегралы 8.1 – 8.5	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
5. Числовые ряды 9.1 – 9.4	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
6. Функциональные последовательности и ряды 10.1 – 10.9	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
Третий семестр		
1. Функции нескольких переменных 1.1 – 1.23	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.
2. Кратные интегралы 2.1 – 2.12	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала. 2. Решение задач.

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в интерактивном режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий, расчетно-графических и курсовых работ.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Текущая аттестация

Типовые задания:

Задание 1.

1). Доказать, что $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

2). Шестой член разложения $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\lg x}\right)^8$ равен 5600. Найти x.

3). Доказать, что $(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)=(A\times C)\bigcap(B\times D)$.

4). Доказать, что для любой функции f верно $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$.

5). Найти

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sin(n!)}{n^2+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{99\cdot 2^n}{n!}$.

Задание 2.

1). Пользуясь разложением по формуле Маклорена, найти
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

2). Построить график функции $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

3). Найти $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

4). Найти $I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin 4x}dx$.

5). Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла
$I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$.

Задание 3.

1). Найти $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}u(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}u(x,y)$, если $u(x,y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

2). Показать, что при $x\to 0, y\to 0$ функция $z=\frac{x+y}{x-y}$ может стремиться к любому пределу. При каком приближении точки (x,y) к точке $(0,0)$ $\lim z=3$, $\lim z=2$, $\lim z=1$, $\lim z=-2$?

3). Найти dz, если $z=f(u,v)$, где $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

4). Вычислить приближенно $(1{,}02)^2\cdot(2{,}03)^2$.

5). Найти угол между градиентами функции $f=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ в точках A(1;2;2) и B(-3;1;0).

6). Найти производную функции $f=zy^2z^3$ в точке M(3;2;1) по направлению вектора MN, где N(7;5;1).

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена полностью - 5 баллов;

Задача содержит неточности и незначительные ошибки - 4 балла;

Решение содержит грубые ошибки - 2 балла.

Промежуточный контроль

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

Типовые задания:

Задание 1.

1. Предел числовой последовательности.
2. Первое и второе правило Лопиталя.
3. Доказать теорему Лагранжа (формула конечных приращений).

Задание 2.

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
2. Определенный интеграл Римана. Свойства определенного интеграла.
3. Доказать признаки Даламбера и Коши сходимости числового ряда.

Задание 3.

1. Понятие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа, необходимое условие условного экстремума.
2. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла.
3. Доказать формулу Грина.

Способ проведения – устный.
Критерии оценивания:

Вопрос изложен полностью – 12 баллов;

Ответ на вопрос содержит несущественные неточности - 10 баллов;

Ответ на вопрос содержит грубые ошибки - 4 балла.

ОПК-1.2. Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.

Типовые задания:

Задание 1.

1. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = 4x^2$, $y = \frac{x^2}{9}$ и прямой $y = 2$.
2. Определить область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$.

Задание 2.

1. Найти длину линии $y(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$. Исследовать на абсолютную сходимость.

ОПК-1.3 Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности

Типовые задания:

Задание 1.

1. Вычислить приближенно $(1{,}02)^2 \cdot (2{,}03)^2$.

2. Найти угол между градиентами функции $f = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках A(1;2;2) и B(-3;1;0).

Задание 2.

1. Доказать, что если уравнением $f(x-az, y-bz)=0$, где $f(u,v)$ - дифференцируемая функция, a,b - постоянные, определяется дифференцируемая функция $z(x,y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$a\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+b\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

2. Найти условный экстремум функции $u=x^2-y^2$ относительно уравнения связи $2x-y-3=0$.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задача решена полностью - 5 баллов;

Задача содержит неточности и незначительные ошибки - 4 балла;

Решение содержит грубые ошибки - 2 балла.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература

1. Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.– Электрон. текстовые данные.– Саратов: Научная книга, 2012.– 159 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6298

2. Гурьянова К.Н. Математический анализ : учебное пособие. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 332 с. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275708

б) Дополнительная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65055

2. Фихтенголь Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 464 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=411

2) Программное обеспечение

а) Лицензионное программное обеспечение
Пакет символьной математики Maple.
б) Свободно распространяемое программное обеспечение

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Сайт ТвГУ: http://homepages.tversu.ru/~s000154/MAPLE/maple.html
Интернет-университет http://www.intuit.ru

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Тема 1. Введение в анализ.

Практическое занятие 1.
Метод математической индукции. Бином Ньютона.
Решение задач на метод математической индукции и бином Ньютона.
Методические рекомендации.
1. Повторить вывод формулы бинома Ньютона.
2. Выполнить задания на самостоятельную работу по методу математической индукции.

Практическое занятия 2.
Множества. Операции над множествами. Декартово произведение.
Эквивалентность множеств.
Решение задач по теме.
Методические рекомендации.
1. Повторить основные понятия теории множеств.
2. Выполнить задания на самостоятельную работу по теории множеств.

Практическое занятие 3.
Отображение, функция. Сюръективные, инъективные, биективные отображения. Обратное отображение. Суперпозиция отображений.
Решение задач по теме.
Методические рекомендации.
1. Разобрать теоретический материал по теме.
2. Выполнить задания на самостоятельную работу по отображениям.

Практическое занятие 4.
Верхняя и нижняя грани числового множества, их характеристические свойства.
Ограниченные отображения, верхняя и нижняя грани отображения.
Понятие метрического и нормированного пространств.

Решение задач №№101 – 102, 106, 108, 116, 381, 383 – 387, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Повторить доказательство теоремы о существовании верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) числового множества.
2. Привести примеры замкнутых и открытых шаров в разных метрических пространствах.
3. Выполнить задания на самостоятельную работу по теме.

Тема 2. Предел последовательности.

Практическое занятие 1.

Предел последовательности в метрическом пространстве. Фундаментальная последовательность, полное метрическое пространство. Критерий Коши сходимости последовательности.

Решение задач №№41 -45, 87 – 89, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Проработать лекции по изученной теме.
2. Выполнить задание на самостоятельную работу по теме.

Практическое занятие 2.

Предел числовой последовательности, теорема о единственности предела числовой последовательности. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности, их свойства. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

Решение задач №№58, 59, 68. 69. 78, 79, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Доказать теорему о единственности предела числовой последовательности.
2. Доказать теорему о существовании предела у ограниченной монотонной последовательности
3. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Практическое занятие 3.

Частичные пределы последовательностей. Верхний и нижний пределы последовательности.

Решение задач по теме.

Методические рекомендации.

1. Доказать теорему Больцано – Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной числовой последовательности.
2. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Тема 3. Предел функции.

Практические занятия 1,2.

Предел функции в точке по Гейне и по Коши; эквивалентность этих определений. Односторонние пределы в точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Критерий Коши существования предела функции в точке.

Решение задач №№402 - 407, 409 – 419, 435 – 439, 471 – 480, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1.Доказать эквивалентность определений предела функции в точке по Гейне и по Коши.

2. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Практические занятия 3, 4.

Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, теоремы о них. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Теорема о пределе сложной функции.

Решение задач №№488, 495, 506, 515, 516, 646 – 651, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Доказать теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.
2. Разобрать доказательство теоремы о пределе сложной функции.
3. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Тема 4. Непрерывность функции.

Практическое занятие 1.

Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Арифметические операции над непрерывными функциями.
Решение задач №№662 – 665, 668, 669, 671, 675 - 679, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Доказать свойство устойчивости знака непрерывной в точке функции.

2. Доказать свойство локальной ограниченности непрерывной в точке функции.

3. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Практическое занятие 2.

Точки разрыва функции и их классификация.
Решение задач №№736 – 738, 741 – 743,745, 747 – 749, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Доказать теорему о точках разрыва монотонной на отрезке функции.
2. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Практическое занятие 3.

Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте (обобщение теоремы Кантора).

Решение задач на равномерную непрерывность.

Методические рекомендации.

1. Доказать теорему о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.
2. Разобрать доказательство теоремы о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте (обобщение теоремы Кантора).
3. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Тема 5. Производная и дифференциал.

Практическое занятие 1.

Производная, ее геометрический смысл. Односторонние производные.

Производная сложной и обратной функций. Дифференцирование функции, заданной параметрически. Производные высших порядков. Дифференциал функции, геометрический смысл дифференциала. Правила вычисления дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

Решение примеров на дифференцирование.

Решение задач на нахождение дифференциалов.

Методические рекомендации.

1. Выучить таблицу производных.
2. Доказать утверждение о непрерывности функции, дифференцируемой в точке.
3. Вывести формулы для производной суммы, произведения и частного двух функций.
4. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Практическое занятие 2.

Первое и второе правило Лопиталя.

Решение задач №№1361 – 1369, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Выполнить задание на самостоятельную работу по раскрытию неопределенностей.

Практическое занятие 3.

Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.

Решение задач №№1376, 1378 – 1380, 1384, 1388, 1392, Б.П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».

Методические рекомендации.

1. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Практическое занятие 4.

Понятие локального экстремума. Выпуклость графика функции. Точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. Исследование функций с помощью дифференциального исчисления.

Методические рекомендации.

1. Доказать необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.
2. Выполнить задание на самостоятельную работу по изученной теме.

Требования к рейтинг-контролю

В течение семестра контроль знаний осуществляется в два этапа (2 модуля), в конце семестра проводится экзамен. Максимально возможный балл за дисциплину равен 100, максимальное количество баллов за каждый модуль равно 30, за экзамен – 40.

Первый семестр

1. Текущий контроль успеваемости

Содержание самостоятельной работы

1. Решение задач на метод математической индукции и бином Ньютона.
2. Овладение основными понятиями теории множеств.
3. Овладение понятием предела последовательности; решение основных типов задач теории последовательностей.

4.Овладение понятием предела функции. Вычисление пределов функций.

5.Непрерывность функции; исследование функций на непрерывность.

6.Освоение основных способов и приемов нахождения производных функций. Решение задач на применение производной и дифференциала функции.

Формы проведения самостоятельной работы:

- домашние задания (изучение литературы по темам, решение примеров и задач);
- написание рефератов;
- выполнение РГР;
- подготовка к контрольным работам;
- подготовка к экзамену.

Формы контроля самостоятельной работы:

- проверка и собеседование по результатам выполнения домашних работ;
- проведение и проверка контрольных работ;
- обсуждение рефератов;
- проверка и обсуждение расчетно-графических работ;
- прием экзаменов.

Типовые варианты рубежных контрольных работ

Вариант 1.

1). Доказать, что $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

2). Шестой член разложения $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\lg x}\right)^8$ равен 5600. Найти x.

3). Доказать, что $(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)=(A\times C)\bigcap(B\times D)$.

4). Доказать, что для любой функции f верно $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$.

5). Найти

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sin(n!)}{n^2+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{99\cdot 2^n}{n!}$.

Вариант 2.

1). Сформулировать с помощью неравенств утверждение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$.

2). Найти

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$.

3). Пусть $f(x),\ g(x)$ - непрерывны в точке x_0. Доказать, что $f(x)\cdot g(x)$ - непрерывна в точке x_0.

4). С помощью “$\varepsilon-\delta$” – рассуждений доказать непрерывность функции $\sqrt{x}$.

5). Найти производные функций

а) $y=\arccos(\sin^2 x)$ б) $y=x^{(x^2-1)}$.

2. Промежуточная аттестация

Вопросы к экзамену (зимняя сессия, 1 курс)

1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображение, функция, обратная функция. Эквивалентность множеств. Счетные множества, их свойства. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества точек интервала (0,1). Множество мощности континуума. Теорема Кантора-Бернштейна (без доказательства). Мощность множества всех подмножеств непустого множества (без доказательства).

2. Вещественные числа; десятичная запись вещественного числа; основные свойства вещественных чисел. Аксиома Архимеда; свойство непрерывности.

3. Верхние и нижние грани числовых множеств, их характеристические свойства. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) числового множества. Ограниченные отображения, верхние и нижние грани отображения.

4. Понятие расстояния; метрическое пространство. Векторное пространство; норма, нормированное пространство. Замкнутый, открытый шар в метрическом пространстве, примеры.

5. Понятие предела последовательности в метрическом пространстве. Фундаментальная последовательность, полное метрическое пространство.

6. Предел числовой последовательности, теорема о единственности предела числовой последовательности. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности, их свойства. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

7. Предельный переход в неравенствах. Теорема о существовании предела у ограниченной монотонной последовательности. Число “e”.

8. Теорема Больцано - Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной числовой последовательности. Верхний и нижний пределы. Критерий Коши сходимости последовательности.

9. Предел функции в точке по Гейне и по Коши; эквивалентность этих определений. Односторонние пределы в точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел.

10. Критерий Коши существования предела функции в точке.

11. Замечательные пределы.

12. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, теоремы о них. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.

13. Теорема о пределе сложной функции.

14. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Арифметические операции над непрерывными функциями. Свойства устойчивости знака непрерывной в точке функции. Свойство локальной ограниченности непрерывной функции . Непрерывность элементарных функций.

15.Точки разрыва функции и их классификация. Теорема о точках разрыва монотонной на отрезке функции.

16. Первая теорема Коши (о прохождении функции через ноль при смене знаков).

17. Вторая теорема Коши (о промежуточном значении непрерывной функции).

18. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции).

19. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении верхней и нижней грани непрерывной на отрезке функцией).

20 Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

21. Свойства открытых и замкнутых множеств. Компакт.

22. Лемма Бореля о конечном покрытии компакта открытыми множествами. Эквивалентность двух определений компакта.

23. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте (обобщение теоремы Кантора).

24. Производная, ее геометрический смысл. Односторонние производные. Непрерывность функции, дифференцируемой в точке. Производная суммы, произведения и частного двух функций.

25. Производная сложной и обратной функций. Производные элементарных функций. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

26. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

27. Дифференциал функции, геометрический смысл дифференциала. Правила вычисления дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

28. Лемма Дарбу о возрастании и убывании функции в точке.

29. Теорема Ферма о локальном экстремуме функции.

30. Теорема Ролля о нуле производной.

31. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений). Теорема о точках разрыва производной на интервале (без доказательства).

32. Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений).

33. Первое и второе правило Лопиталя.

Второй семестр

1. Текущий контроль успеваемости

Содержание самостоятельной работы

1. Решение задач на применение формул Тейлора и Маклорена.
2. Исследование графиков функций и отыскание экстремальных значений.
3. Интегрирование различных классов функций.
4. Вычисление определенных интегралов; решение задач на применение определенных интегралов.
5. Исследование несобственных интегралов на сходимость.
6. Решение задач по теории функциональных рядов (область сходимости функционального ряда; равномерная сходимость; степенные ряды).

Формы проведения самостоятельной работы:

- домашние задания (изучение литературы по темам, решение примеров и задач);
- написание рефератов;
- подготовка к контрольным работам.

Формы контроля самостоятельной работы:

- проверка и собеседование по результатам выполнения домашних работ;
- проведение и проверка контрольных работ;
- обсуждение рефератов.

Типовые варианты рубежных контрольных работ

Вариант 1.

1). Пользуясь разложением по формуле Маклорена, найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

2). Построить график функции $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

3). Найти $I=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

4). Найти $I=\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x}dx$.

5). Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$I_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $\quad (n>2)$.

Вариант 2.

1). Вычислить интегралы

а) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ б) $\int\limits_0^1 x\cdot arctgx\,dx$.

2). С помощью определенного интеграла найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

3). Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y=4x^2$, $y=\frac{x^2}{9}$ и прямой $y=2$.

4). Найти длину линии $y(x)=\int\limits_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

5). Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

Вариант 3.

1). Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$

2). Определить область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

3). Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$. Исследовать на абсолютную сходимость.

4). Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\le x<+\infty$.

5). Написать разложение в степенной ряд относительно x функции

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$$

2. Промежуточная аттестация

Вопросы к экзамену (летняя сессия, 1 курс)

1. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

3. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.

4. Необходимое и три достаточных условия локального экстремума.

5. Выпуклость графика функции. Достаточное условие выпуклости графика функции.

6. Необходимое и три достаточных условия точки перегиба.

7. Асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

8. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

9. Определенный интеграл Римана. Неинтегрируемость по Риману неограниченной на отрезке функции. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу, их свойство. Основная лемма Дарбу.

10. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Теорема об интегрируемости монотонной функции.

11. Свойства определенного интеграла.

12. Оценки определенных интегралов, интегрирование неравенства. Первая формула среднего значения.

13. Интеграл с переменным верхним пределом. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной под знаком определенного интеграла. Правило интегрирования по частям для определенного интеграла.

14. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.

15. Неравенство Юнга, неравенства Гельдера и Минковского для сумм и интегралов.

16. Интеграл Стилтьеса. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции по Стилтьесу. Функции ограниченной вариации. Свойства интеграла Стилтьеса.

17. Приложения определенного интеграла:

- вычисление площадей: криволинейной трапеции; криволинейной трапеции, когда верхняя граница задана в параметрическом виде; площадь в полярных координатах;
- длина дуги кривой; длина дуги кривой, когда кривая задана в параметрическом виде; длина дуги кривой, в полярных координатах.

18. Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

19. Признаки сходимости несобственных интегралов (общий и частный признаки сравнения; признак Абеля-Дирихле). Замена переменной под знаком несобственного интеграла; интегрирование по частям несобственного интеграла.

20. Главное значение несобственного интеграла. Интегрируемость функции по Коши.

21. Числовой ряд, сходимость и расходимость. Гармонический ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Арифметические действия со сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости числового ряда.

22. Признаки сравнения числовых рядов. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда.

23. Абсолютная и условная сходимость ряда. Переместительный закон для абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Признак Дирихле (без доказательства). Признак Абеля.

24. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость последовательностей и рядов.

25. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности и ряда. Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

26. Теорема о непрерывности суммы (предельной функции) равномерно сходящегося ряда (функциональной последовательности).

27. Теорема об интегрируемости суммы (предельной функции) равномерно сходящегося на отрезке ряда (функциональной последовательности).

28. Теорема о дифференцируемости суммы (предельной функции) сходящегося на отрезке ряда (функциональной последовательности).

29. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда. Формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

30. Вторая теорема Абеля.

31. Функция, аналитическая в точке. Единственность представления аналитической в точке функции степенным рядом. Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда.

32. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

Третий семестр

1. Текущий контроль успеваемости

Содержание самостоятельной работы

1. Вычисление повторных и двойных пределов.
2. Исследование функций многих переменных на непрерывность. Дифференцирование функций нескольких переменных.
3. Решение задач на использование формулы Тейлора для функций нескольких переменных.
4. Нахождение экстремумов функций нескольких переменных (безусловного и условного).
5. Решение задач на замену переменных.

6. Вычисление кратных интегралов.

Формы проведения самостоятельной работы:

- домашние задания (изучение литературы по темам, решение примеров и задач);
- написание рефератов;
- подготовка курсовых работ;
- подготовка к контрольным работам;
- подготовка к экзамену.

Формы контроля самостоятельной работы:

- проверка и собеседование по результатам выполнения домашних работ;
- проведение и проверка контрольных работ;
- обсуждение рефератов;
- проверка и обсуждение курсовых работ;
- прием экзаменов.

Типовые контрольные работы

Вариант 1.

1). Найти $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$, если $u(x,y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

2). Показать, что при $x\to 0, y\to 0$ функция $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ может стремиться к любому пределу. При каком приближении точки (x,y) к точке $(0,0)$ $\lim z=3$, $\lim z=2$, $\lim z=1$, $\lim z=-2$?

3). Найти dz, если $z=f(u,v)$, где $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

4). Вычислить приближенно $(1{,}02)^2\cdot(2{,}03)^2$.

5). Найти угол между градиентами функции $f=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ в точках A(1;2;2) и B(-3;1;0).

6). Найти производную функции $f=zy^2z^3$ в точке M(3;2;1) по направлению вектора MN, где N(7;5;1).

Вариант 2.

1). Доказать, что если уравнением $f(x-az,y-bz)=0$, где $f(u,v)$ - дифференцируемая функция, a,b - постоянные, определяется дифференцируемая функция $z(x,y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$a\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+b\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

2). Преобразовать уравнение, вводя новые независимые переменные u,v:

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z},\quad u=2x-z^2,\quad v=-\frac{y}{z}.$$

3). Найти условный экстремум функции $u=x^2-y^2$ относительно уравнения связи $2x-y-3=0$.

4). Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{-1}^{0}dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)dx.$$

2. Промежуточная аттестация

Вопросы к экзамену (зимняя сессия, 2 курс)

1. Предел последовательности точек пространства R^n. Лемма о сходимости последовательности точек в пространстве R^n. Фундаментальная последовательность точек в R^n. Лемма о фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^n. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

2. Предел функции n переменных в точке по Гейне и по Коши; эквивалентность этих определений. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Бесконечно малые функции n переменных.

3. Критерий Коши существования предела функции n переменных в точке.

4. Повторные пределы. Теорема о существовании повторного предела .

5.Непрерывность функции нескольких переменных в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Теорема об устойчивости знака непрерывной в точке функции. Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

6. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции, непрерывной на компакте).

7. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на компакте функцией своих точных граней).

8. Равномерная непрерывность функции нескольких переменных. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте.

9.Частные производные, Дифференцируемость функции нескольких переменных. Теорема о существовании частных производных дифференцируемой в точке функции. Непрерывность дифференцируемой в точке функции. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке. Дифференциал функции нескольких переменных.

10. Дифференцирование сложной функции. Однородные функции степени р. Теорема Эйлера об однородных функциях. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Теорема о производной функции по направлению градиента.

11. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве частных производных дважды дифференцируемой в точке функции. Достаточное условие равенства смешанных производных (случай функции двух переменных и случай функции n переменных). Дифференциалы высших порядков.

12. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (без доказательства).

13. Понятие локального экстремума. Необходимое условие локального экстремума.

14. Достаточное условие локального экстремума.

15.Понятие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа, необходимое условие условного экстремума.

16. Достаточные условия условного экстремума.

17. Касательная плоскость; нормальный вектор.

18.Понятие функции, заданной неявно. Теорема о неявной функции для случая а) одного уравнения с двумя переменными; б) одного уравнения с (n+1) переменной.

19. Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений. Теорема о существовании неявных функций, определяемых системой уравнений (без доказательства); вычисление частных производных функций, неявно определяемых посредством системы функциональных уравнений.

20.Замена переменных для неявно заданных функций: случай одной независимой переменной ((а) переход только к новой переменной; (б) переход к новой переменной и новой функции); случай нескольких переменных ((а) переход только к новым независимым переменным; (б) переход к новым переменным и новой функции).

21.Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности интеграла по параметру. Теорема о дифференцировании интеграла по параметру (правило Лейбница).

22. Двойной интеграл. Теорема об интегрируемости непрерывной функции двух переменных (без доказательства). Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем.

23. Приведение двойного интеграла к повторному ((а) случай прямоугольной области; (б) случай области более общего вида). Двойной интеграл в полярных координатах.

24. Замена переменных в двойном интеграле.

25.Геометрические приложения двойных интегралов (вычисление площадей; вычисление объемов; вычисление площадей поверхностей).

26. Тройной интеграл. Переход к повторному интегралу (без доказательства). Замена переменных (без доказательства); цилиндрическая и сферическая системы координат.

27. Криволинейный интеграл 1-го рода; его свойства.

28. Криволинейный интеграл 2-го рода; его свойства.

29. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.

30. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

31. Поверхностный интеграл 1-го рода.

32. Поверхностный интеграл 2-го рода.

33. Теорема Гаусса-Остроградского (без доказательства).

34. Ортогональная тригонометрическая система. Ряд Фурье для абсолютно интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции; ряд Фурье для четной и нечетной функции. Ряд Фурье в случае произвольного интервала.

35. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладкой функции (без доказательства).

36. Неравенство Бесселя.

37. Признак Дини (без доказательства).

38. Сходимость рядов Фурье для функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

39. Приближение непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

40. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Равенство Парсеваля. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

Вариант расчетно-графической работы

(в рамках самостоятельной работы)

1. Найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{x^2-1}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x-4}{x^2-1}$ в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

д) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1})$ е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 4x}{e^{2x}-1}$ ж) $\lim\limits_{x\to0}(1+7x)^{\frac{1}{x}}$

з) $\lim\limits_{x\to5}\left(3+\frac{3x-2}{x-4}\right)$ и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}\,\right)$ к) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$

2. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\frac{1}{x+2^{x-3}}$ при $x\to 3$

и изобразить эскиз графика этой функции в окрестности точки $x=3$.

3. Даны бесконечно малые функции $\alpha(x)=5x^2+2x^5$ и

$\beta(x)=3x^2+2x^3$ при $x\to0$. Определить порядок малости одной функции относительно другой.

4. Найти точки разрыва следующих функций и изобразить эскизы графиков этих функций в окрестности точек разрыва:

а) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3x}$ б) $f(x)=\frac{e^x}{8^{\frac{1}{x-1}}-2}$ в) $f(x)=\frac{x+2}{x(x+4)}$ г) $f(x)=\frac{3}{2^x-8}$

д) $f(x)=\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}+6}$ е) $f(x)=\frac{4}{3^{\frac{1}{x+2}}+1}$ ж) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le\pi\\ 2, & x>\pi\end{cases}$

з) $f(x)=\begin{cases} ctg\,x, x<0\\ e^x, x\ge0\end{cases}$ и) $f(x)=\frac{sin2x}{3x}$ к) $f(x)=arctg\frac{1}{x-4}$.

Темы курсовых работ

1. Интегрирование дробно-рациональных функций.
2. Интегрирование иррациональных функций.
3. Формула Тейлора (случай одной и нескольких переменных).

4. Числовые ряды.
5. Функциональные ряды.
6. Степенные ряды.
7. Дифференциал функции нескольких переменных и его использование в приближенных вычислениях.
8. Двойные интегралы.
9. Геометрические приложения двойного интеграла.
10. Определенный интеграл.
11. Геометрические приложения определенного интеграла.
12. Замена переменных.
13. Экстремум функции (безусловный).
14. Условный экстремум функции.
15. Несобственные интегралы.
16. Последовательность точек в n-мерном пространстве.
17. Теория множеств.
18. Теория последовательностей в пространстве R.

VII. Материально-техническое обеспечение

Научная библиотека.

Компьютерный класс с лицензионным программным обеспечением.

Возможность использовать ресурсы Интернет (компьютерный класс, доступ в Интернет центр для самостоятельной работы).

Учебная аудитория № 318 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебном мебели, меловая доска, настенный экран Draper Star и проектором Panasonic PT-VW340ZE.
Учебная аудитория № 7 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска.
Учебная аудитория № 205 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Реквизиты документа, утвердившего изменения
1.			
2.			