

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 06.06.2023 14:51:58  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf59408

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП:

Толкаченко О.Ю.

«20» апреля 2022 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

## **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Направление подготовки

**38.03.01 Экономика**

Профиль подготовки

**«Экономика предприятий и организаций»**

Для студентов очной и заочной формы обучения

Составитель:

ст. преподаватель Васильева Е.В.

Тверь, 2022

## **I. Аннотация**

### **1. Учебная дисциплина «Линейная алгебра».**

### **2. Цель и задачи дисциплины**

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра» является:

- применения математического аппарата для решения профессиональных задач выпускника;
- анализа данных, необходимых для решения конкретных экономических задач и подготовки аналитических отчетов;
- проведения расчетов экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующего субъекта.

Задачами освоения дисциплины являются формирование у обучающихся знаний, умений и навыков в области алгебраических методов, используемых для исследования, анализа и решения теоретических и практических проблем экономики.

### **3. Место дисциплины в структуре ООП**

Дисциплина «Линейная алгебра» является дисциплиной базовой части блока 1 и относится к дисциплинам модуля 2, дисциплинам, формирующим общепрофессиональные компетенции. Учебный курс базируется на знаниях курса алгебры и начал математического анализа средней школы, а также навыках и умениях, полученных студентами при изучении дисциплины «Математический анализ».

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» дает обучающимся знания и умения для более качественного освоения следующих дисциплин: «Финансовая математика», «Методы оптимальных решений», «Методы социально-экономических исследований», «Экономический анализ», «Моделирование рискованных ситуаций», «Макроэкономическое планирование и прогнозирование», «Экономика фирмы», «Деньги, кредит, банки».

### **4. Объем дисциплины:**

Для очной формы обучения (набор 2019, 2020 года): 5 зачетных единиц, 180 академических часа, **в том числе контактная работа:** лекции 37 часов, практические занятия 56 часа, **самостоятельная работа:** 60 часов, **контроль** 27 часов.

Для заочной формы обучения – нормативный срок обучения (набор 2018, 2019, 2020 года): 5 зачетных единиц, 180 академических часов, **в том числе контактная работа:** лекции 10 часов, практические занятия 16 часов, **самостоятельная работа:** 141 часов, **контроль** 13 часов.

Для заочной формы обучения – сокращенный срок обучения (набор 2019, 2020 года): 5 зачетных единиц, 180 академических часа, **в том числе контактная работа:** лекции 12 часов, практические занятия 12 часов, **самостоятельная работа:** 107 часов, **контроль** 13 часа; **перекредитовано:** 1 зачетная единица (36 часов).

**5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

<p><b>Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)</b></p>	<p><b>Планируемые результаты обучения по дисциплине</b></p>
<p>Способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач (ОПК-2)</p>	<p><b>Владеть</b> навыками решения математических и экономических задач, формализуемых линейными моделями.</p> <p><b>Уметь</b> применить методы и модели линейной алгебры для решения ряда теоретических и практических профессиональных задач.</p> <p><b>Знать</b> основные понятия и теоремы матричной алгебры и аналитической геометрии.</p>
<p>Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ОПК-3)</p>	<p><b>Владеть</b> навыками построения линейных моделей экономических задач, решения их с помощью методов линейной алгебры, анализа и обоснования полученных результатов.</p> <p><b>Уметь</b> решать задачи курса линейной алгебры вручную и с помощью компьютерных моделей, давать геометрическую интерпретацию результатов и выводов.</p> <p><b>Знать</b> основные методы решений задач и их синтез в рамках изучаемых разделов математики.</p>

**6. Форма промежуточной аттестации** – зачет, экзамен.

**7. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

## 1. Для студентов очной формы обучения

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятель ная работа (час.)
		Лекции	Практические (лабораторные) занятия	
<b>Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство</b>	6	2	2	2
<b>Тема 2. Матрицы</b>	14	4	8	2
<b>Тема 3. Определители</b>	8	2	4	2
<b>Тема 4. Системы линейных уравнений</b>	22	4	12	6
<b>Тема 5. Линейные операторы. Собственные векторы линейных операторов</b>	8	2	4	2
<b>Тема 6. Комплексные числа</b>	6	2	2	2
<b>Тема 7. Квадратичные формы</b>	8	2	4	2
<b>Тема 8. Аналитическая геометрия на плоскости</b>	12	2	4	6
<b>Тема 9. Аналитическая геометрия в пространстве</b>	15	3	6	6
<b>Тема 10. Основы линейного программирования</b>	54	14	28	12
<b>Контроль</b>	27			
<b>ИТОГО</b>	180	37	74	42

## 2. Для студентов заочной формы обучения

### 2.1. Нормативный срок обучения

Учебная программа –	Всего	Контактная работа (час.)	Самостоятель
---------------------	-------	--------------------------	--------------

наименование разделов и тем	(час.)	Лекции	Практические (лабораторные) занятия	ная работа (час.)
<b>Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство</b>	13	1	2	10
<b>Тема 2. Матрицы</b>	12	1	1	10
<b>Тема 3. Определители</b>	12	1	1	10
<b>Тема 4. Системы линейных уравнений</b>	23	1	2	20
<b>Тема 5. Линейные операторы. Собственные векторы линейных операторов</b>	9	-	1	8
<b>Тема 6. Комплексные числа</b>	8	-	-	8
<b>Тема 7. Квадратичные формы</b>	10	1	1	8
<b>Тема 8. Аналитическая геометрия на плоскости</b>	10	-	-	10
<b>Тема 9. Аналитическая геометрия в пространстве</b>	11	1	-	10
<b>Тема 10. Основы линейного программирования</b>	59	4	8	47
<b>Контроль</b>	13			
<b>ИТОГО</b>	<b>180</b>	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>141</b>

## 2.2. Сокращенная программа обучения

Учебная программа – наименование разделов	Всего (час.)	Контактная работа (час.)	Самост ятельн	о и деятел	рствован

и тем		Лекции	Практические (лабораторные) занятия		
<b>Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство</b>	14	-	-	4	10
<b>Тема 2. Матрицы</b>	12	1	1	10	
<b>Тема 3. Определители</b>	12	1	1	10	
<b>Тема 4. Системы линейных уравнений</b>	26	1	1	16	8
<b>Тема 5. Линейные операторы. Собственные векторы линейных операторов</b>	6	1	1	4	
<b>Тема 6. Комплексные числа</b>	8	-	-	2	6
<b>Тема 7. Квадратичные формы</b>	8	1	1	6	
<b>Тема 8. Аналитическая геометрия на плоскости</b>	12	-	-	6	6
<b>Тема 9. Аналитическая геометрия в пространстве</b>	14	1	1	7	6
<b>Тема 10. Основы линейного программирования</b>	54	6	6	42	
<b>Контроль</b>	13				
<b>ИТОГО</b>	180	12	12	107	36

### **III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

1. Учебная программа дисциплины.
2. Вопросы для самоконтроля знаний по дисциплине.
3. Примеры заданий из контрольных работ для текущего контроля качества освоения студентами учебного материала.

4. Методические указания по выполнению контрольной работы для студентов, обучающихся по заочной форме обучения.

5. Контрольные задания для студентов, обучающихся по заочной форме обучения.

6. Методические указания по выполнению самостоятельной работы.

#### IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

**1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции 1:** способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач (ОПК-2).

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
Первый этап, владеть навыками решения математических и экономических задач, формализуемых линейными моделями	<p>Дана матрица</p> $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ <p>Найти определитель матрицы B по правилу треугольников.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Имеется полное верное решение задания, включающее правильный ответ – 3 балла</i></li> <li>• <i>Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки – 2 балла</i></li> <li>• <i>Имеется верное решение части задания – 1 балл</i></li> <li>• <i>Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов</i></li> </ul>

<p>Первый этап, <b>уметь</b> применить методы и модели линейной алгебры для решения ряда теоретических и практических профессиональных задач</p>	<p>Даны матрицы <math>A_{m \times n}</math>, <math>B_{m \times n}</math>, <math>C_{m \times n}</math> выручки фирмы за январь, февраль, март соответственно, где <math>m</math> – число товарных позиций, <math>n</math> – количество магазинов. Найти суммарную выручку за 1 квартал и проанализировать динамику показателя за три месяца.</p> $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$ $B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$ $C_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Имеется полное верное решение задания, включающее правильный ответ – 3 балла</i></li> <li>• <i>Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки – 2 балла</i></li> <li>• <i>Имеется верное решение части задания – 1 балл</i></li> <li>• <i>Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов</i></li> </ul>
<p>Первый этап, <b>знать</b> основные понятия и теоремы матричной алгебры и аналитической геометрии</p>	<p>Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц, умножение матриц, возведение в степень, транспонирование матрицы, обращение матрицы) и их свойства.</p> <p>Теорема Лапласа о вычислении определителей любого порядка.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Тема раскрыта с опорой на соответствующие понятия и теоретические положения – 2 балла</i></li> <li>• <i>Аргументация на теоретическом уровне неполная, смысл ряда ключевых понятий не объяснен – 1 балл</i></li> <li>• <i>Терминологический аппарат не объяснен – 0 баллов</i></li> </ul>

**2. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции 2:** способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ОПК-3).

<p align="center"><b>Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина</b></p>	<p align="center"><b>Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков</b></p>	<p align="center"><b>Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания</b></p>
<p>Первый этап, <b>владеть</b> навыками решения математических и экономических задач, формализуемых линейными моделями</p>	<p>Построить математическую модель текстовой экономической задачи в виде системы линейных алгебраических уравнений. Дать описание переменных и уравнений. Исследовать на разрешимость и решить систему уравнений методом Гаусса. Представить толкование результатов в контексте исходных условий задачи:</p> <p align="center">Предприятие располагает ресурсами двух видов в объемах 120 ед. и 80 ед. соответственно. Эти ресурсы используются для выпуска продукции А и В, причем расход на изготовление единицы продукции вида А составляет 2 ед. ресурса первого вида и 2 ед. ресурса второго вида, продукции вида В- 3 ед. ресурса первого вида и 1 ед. ресурса второго вида. Найти план выпуска продукции А и В, при котором запасы ресурсов расходуются полностью без остатков, если такой план существует.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Построена верная математическая модель, приведено корректное ее решение, дано требуемое описание в полном объеме – 3 балла</i></li> <li>• <i>Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки или не представлено описание– 2 балла</i></li> <li>• <i>Имеется верное решение части задания – 1 балл</i></li> <li>• <i>Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов</i></li> </ul>

<p>Первый этап,  <b>уметь</b> применить методы и модели линейной алгебры для решения ряда теоретических и практических профессиональных задач</p>	<p>Построить математическую модель задачи линейного программирования, решить ее графическим методом, представить описание оптимального решения.</p> <p>На установку и закупку производственного оборудования выделено 96 м<sup>2</sup> и 72 ден. ед. Фирма может приобрести машины типа А стоимостью 12 ден. ед., занимающие площадь в 12 м<sup>2</sup> и выпускающие 14 ед. продукции за смену, и машины типа В стоимостью 6 ден. ед., занимающие площадь в 36 м<sup>2</sup> и обеспечивающие выпуск 20 ед. продукции за смену. При этом машин типа А можно заказать не более 10 штук.</p> <p>Определить объемы закупки машин каждого типа, обеспечивающие максимальный выпуск продукции на новом оборудовании.</p> <p>Проверить полученный оптимальный план закупок, решив задачу с помощью инструмента <i>Поиск решения</i> в MS Excel</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Представлена верная математическая модель с обоснованием, приведено корректное ее решение, дано требуемое описание результата в полном объеме – 3 балла</i></li> <li>• <i>Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки или не представлено описание – 2 балла</i></li> <li>• <i>Имеется верное решение части задания – 1 балл</i></li> <li>• <i>Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов</i></li> </ul>
<p>Первый этап,  <b>знать</b> основные понятия и теоремы матричной алгебры и аналитической геометрии</p>	<p>Решение системы <math>m</math> линейных уравнений с <math>n</math> переменными методом Гаусса. Понятие расширенной матрицы. Эквивалентные преобразования расширенной матрицы.</p> <p>Нахождение оптимального решения</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Вопрос раскрыт с опорой на соответствующие понятия и теоретические положения – 2 балла</i></li> <li>• <i>Аргументация на теоретическом уровне неполная, смысл ряда</i></li> </ul>

	ЗЛП графическим методом с помощью вектора нормали и линии уровня целевой функции.	ключевых понятий не объяснен – 1 балл • Терминологический аппарат не объяснен – 0 баллов
--	-----------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------

## V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

### а) Основная литература:

1. Высшая математика для экономистов: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремер. - 3-е изд. - М. : Юнити-Дана, 2021. - 482 с. : граф. - («Золотой фонд российских учебников»). - ISBN 978-5-238-00991-9; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541>.

2. Исследование операций и принятие решений в экономике: Сборник задач и упр.: учебное пособие для вузов/Невежин В. П., Кружилов С. И., Невежин Ю. В. - М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2021. - 400 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=504735> (ЭБС “ZNANIUM.COM”).

3. Кундышева, Е. С. Математика [Электронный ресурс] : Учебник для экономистов / Е. С. Кундышева. — 4-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2019. — 564 с. - ISBN 978-5-394-02261-6 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=512127>(ЭБС “ZNANIUM.COM”).

4. Высшая математика для экономистов: сборник задач: учеб. пособие / Г.И. Бобрик, Р.К. Гринцевичюс, В.И. Матвеев, Б.М. Рудык. - М.: ИНФРА-М, 2019. - 539 с. - То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://znanium.com/bookread2.php?book=469738> (ЭБС “ZNANIUM.COM”).

### б) Дополнительная литература:

1. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 168 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=455245> (ЭБС “ZNANIUM.COM”).

2. Рудык Б. М. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.М. Рудык. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 318 с. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=460611>.

3. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 544 с. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=438021>.

4. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 472 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=210735> (ЭБС “ZNANIUM.COM”).

5. Бортаковский А. С. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 592 с. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=494895>.

6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник; Под ред. В.И. Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2019. - 656 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=400839> (ЭБС "ZNANIUM.COM").

7. Дюженкова, Л.И. Практикум по высшей математике. Ч. 1 : в 2 ч. [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.И. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.А. Михалин; пер. с укр. - 2-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018. - 448 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=538847> (ЭБС "ZNANIUM.COM").

8. Кряквин, В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2017. — 592 с. — Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=72583](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=72583) (Лань).

9. Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник / Б.Т. Кузнецов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юнити-Дана, 2017. - 719 с. : ил., табл., граф. - (Высшее профессиональное образование: Экономика и управление). - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00754-X ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114717>.

## **VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

Перечень доступных для ТвГУ информационных ресурсов:

- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU;
- ЭБС «Университетской библиотеке ONLINE» Biblioclub.ru;
- ресурсы сайта экономического факультета ТвГУ с учебными и методическими пособиями <http://eco.tversu.ru/esrc.html>.

## **VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

### **7.1. Учебная программа дисциплины**

**Тема 1. Системы векторов. N-мерное линейное векторное пространство. Евклидово пространство.**

Понятие  $n$ -мерного вектора. Линейные операции над  $n$ -мерными векторами. Понятие  $N$ -мерного линейного векторного пространства. Скалярное произведение и длина  $n$ -мерных векторов. Угол между  $n$ -мерными векторами. Понятие евклидова пространства. Разложение вектора по системе векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Базисы системы векторов. Ранг системы векторов. Базис и размерность  $n$ -мерного пространства. Ортогональные системы векторов. Переход к новому базису.

**Тема 2. Матрицы.**

Понятие матрицы. Виды матриц (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, диагональная, единичная, нулевая, верхняя треугольная, нижняя треугольная). Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц, умножение матриц, возведение в степень, транспонирование матрицы, обращение матрицы) и их свойства.

### **Тема 3. Определители.**

Понятие определителя квадратной матрицы. Определители матриц первого, второго и третьего порядков. Правило треугольников вычисления определителя третьего порядка. Понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы. Понятие определителя матрицы  $n$ -о порядка. Теорема Лапласа о вычислении определителей любого порядка. Свойства определителей. Применение определителей для нахождения обратных матриц. Понятие ранга матрицы. Нахождение ранга матрицы методом окаймления миноров.

### **Тема 4. Системы линейных уравнений.**

Понятие системы  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными и ее решения. Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными и ее решение с использованием обратной матрицы. Решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Крамера. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Гаусса. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Жордана-Гаусса. Теоремы о разрешимости системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными. Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных однородных уравнений и фундаментальная система ее решений. Постановка задачи межотраслевого баланса.

### **Тема 5. Линейные операторы. Собственные векторы линейных операторов.**

Оператор. Линейный оператор. Действия над линейными операторами (сумма двух линейных операторов, произведение линейного оператора на число, произведение линейных операторов). Разложение вектора по базису. Матрица линейного оператора.

Линейная модель обмена (модель международной торговли). Понятия собственного вектора и собственного значения квадратной матрицы. Характеристическое уравнение матрицы. Свойства собственных значений матрицы линейного оператора.

### **Тема 6. Квадратичные формы.**

Понятие квадратичной формы. Каноническая квадратичная форма. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

### **Тема 7. Комплексные числа и многочлены.**

Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами и их свойства. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Возведение в степень комплексного числа. Извлечение корня из комплексного числа.

### **Тема 8. Аналитическая геометрия на плоскости.**

Понятие аналитической геометрии. Системы координат на плоскости (система координат, прямоугольная система координат, координаты точки, метод координат, полярная система координат). Приложения метода координат на плоскости (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника).

Прямая линия на плоскости: способы задания (уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две точки; уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; полярное уравнение прямой; нормальное уравнение прямой); угол между двумя прямыми; условия параллельности и перпендикулярности двух прямых; расстояние от точки до прямой.

Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола; их свойства и канонические уравнения. Общее уравнение линий второго порядка на плоскости.

### **Тема 9. Аналитическая геометрия в пространстве.**

Основные понятия аналитической геометрии в пространстве: уравнение поверхности в прямоугольной системе координат, текущие координаты точки поверхности, уравнения линии в пространстве, векторное уравнение линии в пространстве.

Плоскость в пространстве: способы задания (уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящий через три данные точки; уравнение плоскости в отрезках; нормальное уравнение плоскости); угол между двумя плоскостями; условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей; расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве: способы задания (векторное уравнение прямой; параметрические уравнения прямой; классические уравнения прямой; уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки; общие уравнения прямой; угол между прямыми; условия параллельности и перпендикулярности прямых; условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости; угол между прямой и плоскостью; условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости).

### **Тема 10. Основы линейного программирования.**

Общая задача линейного программирования. Примеры задач линейного программирования. Геометрический смысл задачи линейного программирования. Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом с использованием понятий нормального вектора и линии уровня целевой функции. Суть симплексного метода решения задачи линейного программирования. Табличный симплексный метод решения задачи линейного программирования. Виды математических моделей двойственных задач. Общие правила составления двойственных задач. Первая теорема двойственности. Вторая теорема двойственности. Анализ оптимальных решений с помощью теории двойственности.

## **7.2. Вопросы для самоконтроля по дисциплине “Линейная алгебра”**

### **7.2.1. Вопросы для самоконтроля, часть I**

1. Понятие  $n$ -мерного вектора. Линейные операции над  $n$ -мерными векторами.
2. Понятие  $N$ -мерного линейного векторного пространства. Скалярное произведение и длина  $n$ -мерных векторов. Угол между  $n$ -мерными векторами.
3. Понятие евклидова пространства.
4. Разложение вектора по системе векторов.
5. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.
6. Базисы системы векторов. Ранг системы векторов.
7. Базис и размерность  $n$ -мерного пространства.
8. Ортогональные системы векторов. Переход к новому базису.
9. Понятие матрицы. Виды матриц (матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, диагональная, единичная, нулевая, верхняя треугольная, нижняя треугольная).
10. Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц,) и их свойства.
11. Операции над матрицами (транспонирование матрицы, умножение матриц, возведение в степень обращение матрицы) и их свойства.
12. Понятие определителя квадратной матрицы. Обозначения.
13. Понятие минора, алгебраического дополнения элемента матрицы.
14. Правило расчета определителя 2-го порядка.
15. Правила расчета определителя 3-го порядка (правило треугольников, правило Саррюса, правило разложения по элементам строки или столбца).
16. Теорема Лапласа (правило расчета определителя любого порядка  $n$ ).
17. Свойства определителей.
18. Понятие невырожденной матрицы.
19. Определение обратной матрицы.
20. Условие существования обратной матрицы.
21. Расчет обратной матрицы по формуле с помощью присоединенной матрицы.

22. Расчет обратной матрицы методом Жордана с помощью элементарных преобразований.
23. Определение ранга матрицы.
24. Свойства ранга матрицы.
25. Расчет ранга матрицы приведением ее к ступенчатому (трапецидальному) или треугольному виду с помощью элементарных преобразований.
26. Элементарные преобразования матрицы (не изменяющие ее ранг).
27. Теорема о ранге и линейной независимости строк (столбцов) матрицы.
28. Матричный метод решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
29. Метод Крамера решения СЛАУ (при  $m=n$ ).
30. Метод Гаусса решения СЛАУ.
31. Теорема о существовании решения СЛАУ.
32. Метод Жордана – Гаусса решения СЛАУ. Понятие базисных, свободных переменных, базисных решений.
33. Понятие системы  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными и ее решения.
34. Совместные и несовместные системы. Определенные и неопределенные системы.
35. Равносильные системы.
36. Матричная форма записи СЛАУ. Понятие матрицы системы.
37. Методы решения СЛАУ.
38. Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными и ее решение с использованием обратной матрицы.
39. Решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Крамера.
40. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Гаусса. Понятие расширенной матрицы. Эквивалентные преобразования расширенной матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса.
41. Решение системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными методом Жордана-Гаусса.
42. Теоремы о разрешимости системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными. Теорема Кронекера - Капелли.
43. Понятие базисных и свободных переменных, общего решения и базисных решений системы линейных уравнений.
44. Система линейных однородных уравнений и фундаментальная система ее решений.
45. Понятия оператора и линейного оператора. Действия над линейными операторами (сумма двух линейных операторов, произведение линейного оператора на число, произведение линейных операторов).
46. Разложение вектора по базису. Матрица линейного оператора.
47. Линейная модель обмена (модель международной торговли).
48. Понятия собственного вектора и собственного значения квадратной матрицы.
49. Характеристическое уравнение матрицы.
50. Свойства собственных значений матрицы линейного оператора.

51. Понятие квадратичной формы. Каноническая квадратичная форма.
52. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
53. Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа.
54. Арифметические операции над комплексными числами и их свойства.
55. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
56. Возведение в степень комплексного числа. Извлечение корня из комплексного числа.

### **7.2.2. Вопросы для самоконтроля, часть II**

1. Понятие аналитической геометрии. Системы координат на плоскости: система координат, прямоугольная система координат, координаты точки, метод координат, полярная система координат.
2. Приложения метода координат на плоскости: расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника.
3. Способы задания прямой линии на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой.
4. Способы задания прямой линии на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две точки.
5. Способы задания прямой линии на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.
7. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс.
8. Линии второго порядка на плоскости: гипербола, парабола.
9. Общее уравнение линий второго порядка на плоскости.
10. Основные понятия аналитической геометрии в пространстве: уравнение поверхности в прямоугольной системе координат, текущие координаты точки поверхности.
11. Основные понятия аналитической геометрии в пространстве: уравнения линии в пространстве, векторное уравнение линии в пространстве, параметрическое уравнение линии в пространстве.
12. Способы задания плоскости в пространстве: уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости.
13. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.
14. Способы задания прямой в пространстве: классические уравнения прямой; уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки; общие уравнения прямой.

15. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
16. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Определение линейного программирования (ЛП).
18. Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП).
19. Понятия целевой функции, системы ограничений, допустимого решения, оптимального решения ЗЛП.
20. Постановка задачи оптимального планирования производства продукции.
21. Постановка задачи о составлении рациона (задачи о диете).
22. Постановка транспортной задачи как специальной ЗЛП.
23. Стандартная форма ЗЛП с двумя переменными.
24. Теоремы о множестве решений линейного неравенства, совместной системы линейных неравенств.
25. Понятие области допустимых решений ЗЛП при  $n=2$ .
26. Правила построения многоугольника решений (области допустимых решений) ЗЛП (при  $n=2$ ). Виды многоугольника решений.
27. Геометрическая интерпретация замкнутого многоугольника решений, неограниченной многоугольной области решений, пустого множества решений (при  $n=2$ ).
28. Понятие линии уровня и вектора нормали целевой функции (при  $n=2$ ). Правила их построения.
29. Нахождение оптимального решения ЗЛП графическим методом с помощью вектора нормали и линии уровня целевой функции (при  $n=2$ ).
30. Геометрическая интерпретация единственного оптимального решения, множества оптимальных решений, отсутствия оптимальных решений при графическом методе решения ЗЛП.
31. Алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования.
32. Каноническая форма записи ЗЛП. Правила перехода к канонической форме ЗЛП.
33. Понятие выпуклого множества. Теорема о пересечении выпуклых множеств.
34. Понятие выпуклого многогранника. Теорема о представлении точек выпуклого многогранника.
35. Теорема о выпуклости множества допустимых решений ЗЛП.
36. Основная теорема линейного программирования (теорема о соотношении оптимального решения ЗЛП и угловых точек множества допустимых решений ЗЛП).
37. Понятие допустимого базисного решения (ДБР). Теорема о соответствии ДБР и угловых точек многогранника решений.
38. Геометрический смысл симплекс-метода решения ЗЛП. Суть алгоритма симплекс-метода решения ЗЛП.
39. Построение начального допустимого базисного решения. Определение состава базисных и свободных переменных.

40. Алгоритм табличного симплекс-метода. Правила составления симплексных таблиц для нахождения оптимального решения ЗЛП и расчета текущего ДБР.
41. Обоснование правил нахождения разрешающего столбца, разрешающей строки, разрешающего элемента в симплекс-таблицах.
42. Анализ строки оценок в симплекс-таблицах. Признаки оптимальности ДБР, множества оптимальных решений и отсутствия оптимальных решений.
43. Понятие пары двойственных задач. Виды пар двойственных задач.
44. Правила построения двойственных задач линейного программирования.
45. Математические модели симметричных и асимметричных двойственных задач.
46. Экономическая интерпретация переменных двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).
47. Экономическая интерпретация двойственной задачи (при исходной задаче оптимального планирования производства).
48. Первая теорема двойственности и ее экономический смысл.
49. Вторая теорема двойственности и ее экономический смысл.
50. Взаимосвязь оптимальных решений прямой и двойственной задач (на основе теорем двойственности).
51. Свойства двойственных оценок и их экономический смысл.
52. Понятие устойчивости оптимального решения ЗЛП.

### **7.3. Примеры заданий из контрольных работ для текущего контроля качества освоения студентами учебного материала**

#### Контрольные задания по темам 1 и 2

1) Даны векторы в пространстве  $\mathbb{R}^3$  :

$$b = (-2; 4; 7), a_1 = (0; 1; 2), a_2 = (1; 0; 1), a_3 = (-1; 2; 4);$$

- а) показать, что векторы  $a_1, a_2, a_3$  образуют базис в пространстве  $\mathbb{R}^3$ ,
- б) найти разложение вектора  $b$  по базису  $a_1, a_2, a_3$ .
- в) вычислить скалярное произведение векторов  $a_1, a_2$ ,
- г) вычислить косинус угла между векторами  $a_1, a_2$ .

2) Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Вычислить

- а) матрицу  $A^3$ ,
- б) матрицу  $A^T - 4A + 2E$ ,
- в) матрицу  $X$  такую, что  $AX = E$ .

#### Контрольные задания по теме 3

1) Вычислить матричное выражение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$$

2) Дана матрица  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти определитель матрицы B двумя способами:

а) по правилу треугольников, б) с помощью преобразования к треугольному виду.

3) Найти определитель матрицы A и указанные минор и алгебраическое дополнение к элементам матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 14 & 10 \end{pmatrix}, M_{22}, A_{32}$$

*Указание:* определитель 4-го порядка преобразовать с целью получения строки или столбца с тремя нулевыми элементами, затем вычислить определитель с помощью разложения по элементам этой строки (столбца).

4) Решить уравнение: 
$$\begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 1-x & x \end{vmatrix} = 0$$

#### Контрольные задания по теме 4

1) Определить ранг матрицы A, приведя ее к треугольному или ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Решить систему линейных уравнений двумя способами:

- а) матричным методом с помощью обратной матрицы,  
б) методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

3) Дана система линейных уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ cx - y = d \end{cases}$$

Привести значения параметров **c** и **d**, при которых система является а) несовместной, б) совместной определенной, с) совместной неопределенной.

Решить совместную определенную систему и построить график для иллюстрации решения.

### Контрольные задания по темам 4, 5, 7

1) Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

2) Найти для данной системы линейных уравнений:

- а) число сочетаний базисных переменных (число базисных решений),
- б) все сочетания базисных переменных,
- в) 3 базисных решения с помощью метода Жордана – Гаусса (выполнить в табличной форме).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_5 = 9. \end{cases}$$

3) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы **A**. Выполнить проверку.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Выписать матрицу квадратичной формы. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

$$f(X) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_3^2.$$

### Контрольные задания по теме 10



$a_{1n}x_n$  – это ...

$b_m$  – это ...

$c_n x_n$  – это ... и т.п.,

например,

$a_{23}$  – это количество ресурса 2-го вида, расходуемого на производство одной единицы продукции 3-го вида,

$a_{23}x_3$  – это количество ресурса 2-го вида, расходуемого на производство  $x_3$  единиц продукции 3-го вида.

3) Решите ЗЛП графическим методом: построение области допустимых решений (ОДР), вектора нормали и линии уровня целевой функции; нахождение точек минимума и максимума целевой функции. Например,

$$f(x) = -5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

4) Дана ЗЛП. Например,

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 570 \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420 \\ 40x_1 + 10x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Приведите к каноническому виду и найдите начальное допустимое базисное решение (ДБР).

2. Выполните анализ оптимальности ДБР по итерации в симплекс-таблице двойственных переменных. Представьте ДБР.

Базис	В	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_2$	8	0	1	$1/45$	$-1/90$	0
$x_1$	1	1	0	$-1/18$	$7/90$	0
$x_5$	480	0	0	2	-3	1
$z$	67	0	0	$-1/90$	$-13/90$	0

3. Выполните анализ двойственных переменных по представленной симплекс-таблице

4. Постройте двойственную задачу для данной ЗЛП. Опишите экономический смысл двойственной задачи.

5. Оптимальное решение ЗЛП:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 8$ . Выполните анализ оптимального решения с помощью теории двойственности.

6. Проиллюстрируйте 1 теорему двойственности.

7. Проиллюстрируйте 2 теорему двойственности.

8. Проиллюстрируйте 3 теорему двойственности.

#### **7.4. Методические указания по выполнению контрольной работы для студентов, обучающихся по заочной форме обучения**

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями.

1. Работа должна быть представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

2. Работу следует правильно оформить и выполнить четким, разборчивым почерком без применения сокращений слов. Страницы пронумеровать. Иметь поля для замечаний преподавателя.

3. В начале работы должен быть указан номер варианта. Номер варианта работы соответствует номеру фамилии студента в журнале учебной группы.

4. Последовательность изложения решений задач должна соответствовать их номерам в задании.

5. Перед решением задач необходимо указать их номер и полностью привести условие.

6. Решение задания должно завершаться ответом с указанием искомых величин и их значений.

7. Решение задач следует представлять в развернутом виде с краткими пояснениями и подробными арифметическими расчетами. При этом сначала необходимо привести определение и выражение для вычисления искомой характеристики. Задачи, в которых приводятся только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

8. Титульный лист контрольной работы должен быть корректно оформлен с указанием названия дисциплины, формы (заочной) и профиля обучения, номера группы, фамилии, имени, отчества студента.

Студенты, не выполнившие контрольную работу или не устранившие замечания преподавателя, к сдаче зачета и экзамена не допускаются.

#### **7.5. Контрольные задания для студентов, обучающихся по заочной форме обучения**

Типовые задания заимствованы из учебника [4] (см. список дополнительной литературы).

##### **Типовое задание №1**

Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (табл. 1). Найти: а) произведение каждого из них на число 2; б) их сумму; в) их разность; г) их длину; д) угол между ними; е) их

скалярное произведение; ж) их векторное произведение. Проверить, не являются ли они коллинеарными или ортогональными.

### Типовое задание №2

Вычислить определитель матрицы **A** (табл. 2).

### Типовое задание №3

Найти произведение матриц **A** и **B** вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 2 & -1 \\ -1 & \kappa_2 & 3 \\ -2 & 4 & \kappa_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(табл. 3).

### Типовое задание №4

Дана матрица **A** (табл. 4). Найти матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$  и установить, что  $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ .

### Типовое задание №5

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений (табл. 5) с использованием обратной матрицы, методом Крамера и методом Гаусса.

### Типовое задание №6

Дана система векторов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ , в которой  $\alpha_3 = (0, 1, 1, 2)$ ,  $\alpha_4 = (1, 1, 1, 3)$ ,  $\alpha_5 = (1, 0, -2, -1)$ ,  $\alpha_6 = (1, 0, 1, 2)$ . Дополнить линейно независимую часть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (табл. 6) до базиса системы векторов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису.

Таблица 1. Примеры вариантов задания 1

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	$2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$	$\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$	2	$6\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$	$2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

Таблица 2. Примеры вариантов задания 2

Вариант	Матрица <b>A</b>	Вариант	Матрица <b>A</b>
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

Таблица 3. Примеры вариантов задания 3

Вариант	$k_1$	$k_2$	$k_3$	Вариант	$k_1$	$k_2$	$k_3$
---------	-------	-------	-------	---------	-------	-------	-------

1	-5	7	-3	2	-2	7	3
---	----	---	----	---	----	---	---

Таблица 4. Примеры вариантов задания 4

Вариант	Матрица А	Вариант	Матрица А
1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Таблица 5. Примеры вариантов задания 5

Вариант	Система линейных уравнений	Вариант	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 + 3x_2 = 30. \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$

Таблица 6. Примеры вариантов задания 6

Вариант	$\alpha_1$	$\alpha_2$	Вариант	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	(4,5,-3,6)	(1,-4,5,2)	2	(6,12,-7,11)	(2,3,3,8)

#### Типовое задание №7

Найти собственные значения и собственные векторы матриц (табл. 7).

#### Типовое задание №8

Найти угол между плоскостью  $\alpha$  и прямой, проходящей через начало координат и точку  $M$  (табл. 8).

#### Типовое задание №9

Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $l$  (табл. 9).

#### Типовое задание №10

Построить кривые по заданным уравнениям (табл. 10).

#### Типовое задание №11

Даны комплексные числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  (табл. 11). Найти: а) их сумму; б) их разность; в) их произведение; г) их частное; д) тригонометрическую форму каждого числа; е) квадрат каждого числа; ж) квадратный корень из каждого числа.

#### Типовое задание №12

Найти линейное преобразование неизвестных, приводящее квадратичные формы, заданные своими матрицами (табл. 12), к каноническому виду. Определить, является ли квадратичная форма знакоопределенной.

Таблица 7. Примеры вариантов задания 7

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Таблица 8. Примеры вариантов задания 8

Вариант	$M$	$\alpha$	Вариант	$M$	$\alpha$
1	(2; -1; 3)	$3x - y + 2z - 4 = 0$	2	(-2; 4; -3)	$x + 5y + 7z - 2 = 0$

Таблица 9. Примеры вариантов задания 9

Вариант	$M$	$l$	Вариант	$M$	$l$
1	(3; 2; 1)	$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}$	2	(-4; 5; -2)	$\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{2}$

Таблица 10. Примеры вариантов задания 10

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
1	$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9,$ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$ $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1,$ $y^2 = 9x.$	2	$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9,$ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1,$ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1,$ $y^2 = -4x.$

Таблица 11. Примеры вариантов задания 11

Вариант	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	Вариант	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$
1	2	-1	-1	-2	2	-2	4	-3	5

Таблица 12. Примеры вариантов задания 12

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

### Типовое задание №13

Решить задачу линейного программирования (табл. 13):

- 1) графическим методом с использованием понятий нормального вектора и линии уровня целевой функции; построить и четко обозначить полуплоскости, область допустимых решений, линии уровня и вектор градиент целевой функции; обосновать полученное решение.
- 2) графическим методом путем вычисления значений целевой функции во всех вершинах области допустимых решений;
- 3) табличным симплексным методом.

Таблица 13. Примеры вариантов задания 13

Вариант	Задача линейного программирования	Вариант	Задача линейного программирования
1	$\begin{cases} z = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	2	$\begin{cases} z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

### 7.6. Методические указания по выполнению самостоятельной работы

#### *Методические рекомендации по использованию рабочей программы дисциплины в начале изучения дисциплины*

1. Ознакомиться с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) (режим доступа: <http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/88>), обратив внимание на:

- виды профессиональной деятельности, к которым готовятся выпускники, освоившие программу бакалавриата;
- профессиональные задачи, которые должен быть готов решать выпускник, освоивший программу бакалавриата;
- требования к результатам освоения программы бакалавриата.

2. Ознакомиться по данной рабочей программе дисциплины с:

- целью и задачами дисциплины;
- местом дисциплины в структуре образовательной программы;
- перечнем планируемых результатов обучения по дисциплине;
- структурой изучения дисциплины и изучаемым темам по “Содержанию дисциплины, структурированному по темам ...” и “Учебной программе дисциплины”;

- перечнем основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

3. Получить в филиале №1 научной библиотеки ТвГУ учебные пособия из списка основной литературы в печатном виде (при наличии) или пароли и логины для доступа к электронно-библиотечным системам “Университетская библиотека ONLINE” и “ZNANIUM.COM”.

## 7.7. Требования к рейтинг-контролю (общие положения)

1. Рейтинг-контроль по дисциплине осуществляется в соответствии с “Положением о рейтинговой системе обучения студентов ТвГУ”, принятым на заседании ученого совета ТвГУ 31.05.2017 г. (режим доступа: [university.tversu.ru/sveden/files/Pologenie\\_rating\\_31.05.17.pdf](http://university.tversu.ru/sveden/files/Pologenie_rating_31.05.17.pdf)).
2. К **формам проведения рейтинг-контроля** по данной дисциплине относятся:
  - 1) **текущий контроль** качества освоения студентами учебного материала (блиц-опросы, письменные контрольные работы по темам);
  - 2) **рубежный контроль** качества освоения студентами учебного материала за модуль (письменная контрольная работа, коллоквиум);
  - 3) **промежуточный (итоговый) контроль** качества освоения студентами учебного материала за семестр (зачет в 1 семестре, экзамен во 2 семестре).
3. Текущий и рубежный контроль осуществляются на практических занятиях. Преподаватель информирует учебную группу о сроке проведения письменной контрольной работы в рамках рубежного контроля по завершении модуля и о выносимых на нее вопросах и заданиях не менее чем за 1 неделю до проведения. Преподаватель информирует студентов о выносимых на зачет (экзамен) вопросах и задачах не менее чем за месяц до проведения зачета (экзамена).
4. Качество усвоения студентами дисциплины в целом (по результатам текущего, рубежного и итогового контролей) в соответствии с п. 4.1 "Положения о рейтинговой системе обучения ..." оценивается по 100-балльной шкале.
5. Критериями оценки качества усвоения студентами дисциплины при текущем контроле на практических занятиях являются: 1) полнота и самостоятельность выполнения заданий; 2) понимание сути применяемого математического аппарата; 3) правильность расчетов и обоснований при выполнении практических заданий.
6. **Общее количество баллов, полученных студентом по результатам промежуточных этапов контроля** (текущий и рубежный контроли) **в модуле**, определяется как сумма общего количества баллов за текущую работу в модуле и количества баллов, полученных на рубежном контроле.
7. **Общее количество баллов, полученных студентом по результатам промежуточных этапов контроля** (текущий и рубежный контроли) **в семестре**, определяется как сумма баллов, полученных студентом по результатам промежуточных этапов контроля (текущий и рубежный контроли) в каждом из 2 модулей семестра.
8. Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся **зачетом**, составляет 100 баллов. Студенту, набравшему 50 баллов и выше

по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студент, набравший от 20 до 49 баллов включительно, сдает зачет в последнюю неделю семестра по данной дисциплине. Баллы, полученные на зачете, проставляются в ведомости. Студенту, набравшему меньше 20 баллов, в экзаменационной ведомости выставляется оценка «не зачтено». Данному студенту разрешается передача зачета по направлению деканата на последней неделе семестра.

9. Максимальная оценка качества усвоения студентами дисциплины, заканчивающейся экзаменом, по результатам текущего и рубежного контролей в семестре составляет 60 рейтинговых баллов.

Студенту, набравшему 50-54 балла (по итогам текущего и рубежного контролей) на последнем занятии по дисциплине может быть выставлена оценка “удовлетворительно”. Студенту, набравшему 55-60 баллов (по итогам текущего и рубежного контролей) на последнем занятии по дисциплине может быть выставлена оценка “хорошо”. Студенту, набравшему меньше 20 баллов, в экзаменационной ведомости выставляется оценка “неудовлетворительно”. Оценку “отлично” студент может получить только на экзамене.

Максимальная оценка качества освоения студентами дисциплины на экзамене составляет 40 рейтинговых баллов.

Интегральная рейтинговая оценка качества освоения дисциплины в целом определяется как сумма общего количества баллов, полученных студентом по результатам промежуточных этапов контроля (текущий и рубежный контроли) в семестре и количества баллов, полученных на экзамене.

Шкала пересчета рейтинговых баллов в оценку имеет вид:

Диапазон рейтинговых баллов	Оценка
20-49	Неудовлетворительно
50-69	Удовлетворительно
70-84	Хорошо
85-100	Отлично

## 7.8. Требования к рейтинг-контролю по дисциплине «Линейная алгебра»

**7.8.1.** Распределение максимальных баллов по видам работы в рамках рейтинговой системы в 1 семестре, зачет.

:

Вид отчетности	Баллы
Работа в семестре	100
Из них:	
✓ в 1 модуле:	
• работа на практических занятиях,	10
• контрольные работы,	25
✓ во 2 модуле:	
• работа на практических занятиях,	10

<ul style="list-style-type: none"> <li>• контрольные работы,</li> <li>• коллоквиум.</li> </ul>	25 30
Зачет	по факту
Итого:	100

Рейтинговые баллы на практических занятиях получают студенты за активное участие в обсуждении и решении задач, работу у доски, решение заданий повышенной сложности. Письменные контрольные работы предусмотрены по каждой теме учебного плана дисциплины. Коллоквиум (от лат. colloquium — разговор, беседа) является видом проверки и оценивания знаний студентов в форме собеседования с преподавателем по теоретическим вопросам и практическим заданиям, изученным в течение семестра по дисциплине «Линейная алгебра».

*Примерные задания в рамках проведения текущего контроля*

1) Вычислить матричное выражение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$$

2) Дана матрица  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти определитель матрицы B двумя способами:

- а) по правилу треугольников,
- б) по формуле Лапласа, раскладывая определитель по элементам любой строки (столбца).

3) Решить систему линейных уравнений двумя способами:

- а) матричным методом с помощью обратной матрицы,
- б) методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

*Шкала оценки заданий:*

- Имеется полное верное решение задания, включающее правильный ответ – 3 балла.
- Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки – 2 балла.
- Имеется верное решение части задания – 1 балл.

- Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.

**7.8.2. Распределение максимальных баллов по видам работы в рамках рейтинговой системы во 2 семестре, экзамен.**

Вид отчетности	Баллы
Работа в семестре	60
Из них:	
✓ в 1 модуле:	
• работа на практических занятиях,	10
• контрольные работы,	20
✓ во 2 модуле:	
• работа на практических занятиях,	10
• контрольные работы.	20
Экзамен	40
Итого:	100

Рейтинговые баллы на практических занятиях получают студенты за активное участие в обсуждении и решении задач, работу у доски, решение заданий повышенной сложности. Письменные контрольные работы предусмотрены по каждой теме учебного плана дисциплины.

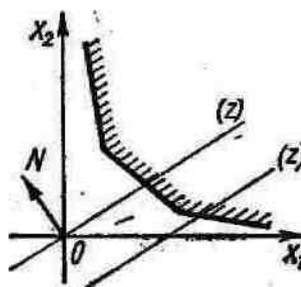
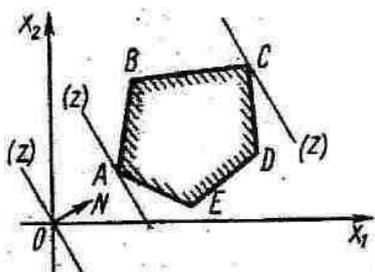
*Примерные задания в рамках проведения текущего контроля*

1) Постройте математическую модель задачи оптимального планирования производства с описанием переменных, целевой функции и ограничений.

Для изготовления двух видов продукции используется 3 типа сырья, запасы которого и нормы расхода на единицу продукции заданы в таблице.

Вид продукции	Тип сырья, нормы затрат ресурса			Прибыль от реализации 1 ед. продукции (ден. ед.)
	A	B	C	
Продукция I	6	1	3	52
Продукция II	2	4	7	75
Запасы сырья, ед.	20	95	83	

2) Укажите точки максимума и минимума целевой функции по чертежу, дайте обоснование ответа.



3) Решите ЗЛП графическим методом: построение ОДР, вектора нормали и линии уровня целевой функции; нахождение точек минимума и максимума целевой функции. Например,

$$f(x) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

*Шкала оценки заданий:*

- *Имеется полное верное решение задания, включающее правильный ответ – 3 балла.*
- *Дано верное решение, но получен неправильный ответ из-за арифметической ошибки – 2 балла.*
- *Имеется верное решение части задания – 1 балл.*
- *Решение не дано или дано неверное решение – 0 баллов.*

**VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)**

а) педагогические технологии:

- объяснительно-иллюстративная (традиционная) технология обучения;
- практическая (традиционная) технология обучения;
- технология модульно-рейтингового обучения;
- технология проектного обучения;
- технология развивающего обучения;

б) программное обеспечение:

- программы пакета MS Office: Excel, PowerPoint (версии 2010);

в) электронно-библиотечные системы:

- Университетская библиотека ONLINE;
- ZNANIUM.COM;
- BIBLIOTHECA.RU.

**IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база необходимая и применяемая для осуществления образовательного процесса и программное обеспечение по дисциплине включает:

- специальные помещения (аудитории), укомплектованные специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации в аудитории;
- мультимедийное оборудование (ноутбук, экран и проектор);
- ПК для самостоятельной работы студентов в компьютерном классе с выходом в Интернет.

**Перечень лицензионного программного обеспечения:**

Adobe Reader XI (11.0.13) – Russian - 6  
 Google Chrome - 6  
 Microsoft Office профессиональный плюс 2010 Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017  
 Audit XP Акт предоставления прав № Tr063036 от 11.11.2014  
 Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г  
 Project Expert 7 Tutorial Договор №40 от 11.09.2012 г  
 Audit Expert 7 Tutorial Договор №40 от 11.09.2012 г  
 Prime Expert 7 Tutorial Договор №40 от 11.09.2012 г  
 Microsoft Windows 10 Enterprise Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017  
 CorelDRAW Graphics Suite X4 Education License Акт приема- передачи № Tr034515 от 15.12.2009  
 AnyLogic PLE - 6  
 iTALC – 6  
 1С: Предприятие 8. Комплект для обучения в высших и средних учебных заведениях Акт приема-передачи №Tr034562 от 15.12.2009  
 СПС ГАРАНТ аэро договор №5/2018 от 31.01.2018  
 Консультант + – договор № 2018С8702

**Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины**

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания совета Института экономики и управления, утвердившего изменения
1.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Обновлен список литературы по дисциплине	№ 13 от 20.04.2022 г.
2.	VII. Методические указания для	Добавлены примерные задания для текущего	№13 от 20.04.2022 г.

	обучающихся по освоению дисциплины	контроля по дисциплине	
--	------------------------------------------	------------------------	--