Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:

Руководитель ООП

_______________ А.А. Голубев

«16» 06 2021 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Функциональный анализ

Направление подготовки

01.03.01 Математика

Профиль подготовки

Преподавание математики и информатики

Для студентов 3 курса

Форма обучения очная

Составитель: _______________

к.ф.-м.н., доцент Могилевский И.Ш.

Тверь, 2021

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины

Цели: формирование компетенций в области математических дисциплин, включая знания, умения, навыки, обеспечивающие успешность научно-педагогической деятельности.

Основными *задачами* изучения дисциплины являются:

1. фундаментальная подготовка в области функционального анализа и теории функций;
2. умение применять методы функционального анализа и теории функций вещественного переменного при изучении уравнений в частных производных, численных методов, методов оптимизации;
3. получение практических навыков работы с методами функционального анализа.
4. овладение математическим языком, на котором написаны многие разделы математики и физики.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 учебного плана – к дисциплинам, формирующим универсальные и общепрофессиональные компетенции. Дисциплина имеет логические и содержательно-методические взаимосвязи со всеми математическими и естественнонаучными дисциплинами.

Для успешного освоения дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате изучения математического анализа и алгебры.

Освоение дисциплины для дальнейшего обучения в магистратуре по большинству математических профилей подготовки.

Дисциплина изучается на 3 курсе (6-й семестр).

3. Объем дисциплины: 3 зачетные единицы, 108 академических часов, **в том числе:**
контактная аудиторная работа: лекции 34 часа, практические занятия 34 часа;
самостоятельная работа: 40 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Осуществляет отбор теоретического и практического материала ОПК-1.2 Решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности ОПК-1.3 Использует различные методы и приемы решения задач профессиональной деятельности

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения
зачет (6 семестр).

6. Язык преподавания: русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем		Всего (час.)	Контактная работа		Самостоя-тельная работа, в том числе контроль (час.)
Разделы	Темы		Лекции	Практи-ческие занятия	
1. Мера Лебега на прямой. Измеримые функции.	1. Множества и отображения. Операции над множествами. Мощность множеств. Счетные множества. Множества мощности континуум.	11	3	2	6
	2. Мера открытых и замкнутых ограниченных множеств на прямой. Внешняя и внутренняя меры множества. Измеримые по Лебегу множества. Свойства меры Лебега.	14	3	4	7
	3. Измеримые функции и их свойства. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентные функции. Сходимости по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина.	11	3	2	6
2. Интеграл Лебега	1. Интеграл Лебега от измеримой ограниченной функции одного переменного.	7	3	2	2
	2. Интеграл Лебега от измеримой неограниченной функции одного переменного. Предельный переход под знаком интеграла.	6	2	2	2
	3. Мера многомерного множества. Интеграл Лебега от функции мно-	5	1	2	2

<table>
<tr><th colspan="2">Учебная программа – наименование разделов и тем</th><th rowspan="2">Всего (час.)</th><th colspan="2">Контактная работа</th><th rowspan="2">Самостоя-тельная работа, в том числе контроль (час.)</th></tr>
<tr><th>Разделы</th><th>Темы</th><th>Лекции</th><th>Практи-ческие занятия</th></tr>
<tr><td></td><td>гих переменных. Теорема Фубини.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">3. Общие сведения о бесконечно мерных пространст вах</td><td>1. Полные метрические простран-ства. Принцип сжимающих отображений.</td><td>7</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2. Компактные множества в метрических пространствах. Компактность и полная ограниченность. Теорема Арцела.</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3. Нормированные и банаховы пространства. Примеры.</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4. Линейные операторы и функцио-налы.</td><td>1. Линейные операторы. Ограниченность и непрерывность линейных операторов. Норма линейного оператора. Пространство линейных непрерывных операторов. Его полнота. Сильная и равномерная сходимости последовательностей линейных операторов.</td><td>9</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2. Обратный оператор. Ряд Неймана. Спектр и резольвента оператора.</td><td>7</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике.</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4. Линейные функционалы. Примеры. Теорема Хана-Банаха.</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5. Гильбертово пространство. Ортогональность. Теорема об ортогонализации.</td><td>9</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>

Учебная программа – наименование разделов и тем		Всего (час.)	Контактная работа		Самостоятельная работа, в том числе контроль (час.)
Разделы	Темы		Лекции	Практические занятия	
	Базис. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Представление линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством.				
	Итого	108	34	34	40

III. Образовательные технологии

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании аудиторных занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Также на занятиях практикуется самостоятельная работа студентов, выполнение заданий в малых группах, письменные работы, моделирование дискуссионных ситуаций, работа с раздаточным материалом, привлекаются ресурсы сети INTERNET. Курс предусматривает выполнение контрольных и самостоятельных работ, письменных домашних заданий. В качестве форм контроля используются различные варианты взаимопроверки и взаимоконтроля.

Интерактивное взаимодействие студентов с одной стороны и преподавателя с другой, а также студентов между собой и с преподавателем во время практических занятий.

Образовательные технологии

1. Дискуссионные технологии
2. Информационные (цифровые)
3. Технологии развития критического мышления

Современные методы обучения

1. Активное слушание
2. Лекция (традиционная)

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации

Текущий контроль успеваемости проводится в виде устных опросов, решения задач на практических занятиях, выполнения письменных контрольных работ и рейтинг-контроля.

Вся дисциплина делится на 2 модуля. Рейтинг-контроль проводится в конце каждого модуля на 8-ой и 16-ой неделях семестра и заключается в выполнении контрольной работы, состоящей из 4-5 задач. Для подготовки к устным ответам, выполнению письменных работ и прохождению рейтинг-контроля студентам предлагаются типовые задачи к соответствующему модулю.

Контрольная работа № 1

1. Какова мощность множества всех отрезков на прямой, концы которых суть целые числа?
2. Постройте взаимно-однозначное отображение интервала (a, b) на числовую прямую.
3. Приведите пример такого измеримого множества $E \subset [0,1]$, что $mE = 0,\ m\overline{E} = \frac{1}{2}$.
4. Пусть E -- измеримое, ограниченное множество и функция $f^4(x)$ измерима на E. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ измерима на E?

Контрольная работа № 2

1. Интегрируема ли по Риману следующая функция, заданная на отрезке $[0,1]$,

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in P_0 \\ 2, & x \notin P_0 \end{cases}$, где P_0 есть канторово множество. Вычислите интеграл

Лебега от этой функции по отрезку $[0,1]$.

2. Вычислите интеграл Лебега от следующей функции по отрезку $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x,\ x - \text{иррационально},\ x > \frac{1}{2} \\ x^2,\ x - \text{иррационально},\ x < \frac{1}{2} \\ 1,\ x - \text{рационально} \end{cases}$$

3. Вычислите интеграл Лебега от неограниченной функции $\int\limits_{(2,3)} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

4. Приведите пример последовательности заданных на отрезке $[0,1]$ измеримых суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, таких, что

$f_n(x) \to f(x)$ *почти всюду*, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,dx \neq \int\limits_{[0,1]} f(x)\,dx$.

Контрольная работа № 3

1. Докажите, что указанная функция является метрикой в R^2 и изобразите в этой метрике единичный шар с центром в начале координат:

$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

2. Докажите, что функция $\rho(x,y) = |arctg(1+x) - arctg(1+y)|$ является метрикой на прямой выясните, является ли пространство (R,ρ) полным.
3. Является ли предкомпактным множество функций $\{x_n(t) = t^n\}$ в пространстве $C\left[0,\frac{1}{2}\right]$?
4. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность функций $\{x_n(t) = t^n - t^{2n}\}$.

Контрольная работа № 4

1. Найдите норму оператора $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\,d\tau$.

1. Пусть задана последовательность действительных чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. При каких условиях на эти числа оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots \lambda_n x_n, \ldots)$ является ограниченным и какова его норма?

3. Пусть задана последовательность линейных операторов $A_n : l_2 \to l_2$, $A_n x = (x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0, x_{n+1} \ldots)$. Имеет ли эта последовательность предел в пространстве линейных ограниченных операторов и, если да, то каков характер сходимости?

Типовые задачи к I модулю

1. Какова мощность множества всех отрезков на прямой, концы которых суть целые числа?
2. Постройте взаимно-однозначное отображение интервала (a, b) на числовую прямую.
2. Приведите пример такого измеримого множества $E \subset [0,1]$, что $mE = 0, m\overline{E} = \frac{1}{2}$.
3. Пусть E -- измеримое, ограниченное множество и функция $f^4(x)$ измерима на E. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ измерима на E?

4. Интегрируема ли по Риману следующая функция, заданная на отрезке $[0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in P_0 \\ 2, \ x \notin P_0 \end{cases}$, где P_0 есть канторово множество. Вычислите интеграл Лебега от этой функции по отрезку $[0,1]$.
6. Вычислите интеграл Лебега от следующей функции по отрезку $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x, \ x\text{–}\textit{иррационально}, \ x > \frac{1}{2} \\ x^2, \ x\text{–}\textit{иррационально}, \ x < \frac{1}{2} \\ 1, \ x\text{–}\textit{рационально} \end{cases}$$

7. Вычислите интеграл Лебега от неограниченной функции $\int\limits_{(2,3)} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.
8. Приведите пример последовательности заданных на отрезке $[0,1]$ измеримых суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, таких, что $f_n(x) \to f(x)\ \textit{почти всюду}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,dx \neq \int\limits_{[0,1]} f(x)\,dx$.

Типовые задачи к II модулю

1. Докажите, что указанная функция является метрикой в R^2 и изобразите в этой метрике единичный шар с центром в начале координат: $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.
2. Докажите, что функция $\rho(x, y) = |arctg(1+x) - arctg(1+y)|$ является метрикой на прямой выясните, является ли пространство (R, ρ) полным.
3. Является ли предкомпактным множество функций $\{x_n(t) = t^n\}$ в пространстве $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$?
4. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность функций $\{x_n(t) = t^n - t^{2n}\}$.

5. Найдите норму оператора $A\colon C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^t \tau x(\tau)d\tau$.

6. Пусть задана последовательность действительных чисел $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\}$. При каких условиях на эти числа оператор $A\colon l_2\to l_2$, $Ax=(\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\ldots\lambda_n x_n,\ldots)$ является ограниченным и какова его норма?

7. Пусть задана последовательность линейных операторов $A_n : l_2\to l_2$, $A_n x=(x_1,x_2,\ldots x_{n-1},0,x_{n+1}\ldots)$. Имеет ли эта последовательность предел в пространстве линейных ограниченных операторов и, если да, то каков характер сходимости?

2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Планируемый образовательный результат (компетенция, индикатор)	Типовые контрольные задания	Критерии оценивания и шкала оценивания
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.1 Осуществляет отбор теоретического и практического материала ОПК-1.2 Решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности ОПК-1.3 Использует различные методы и приемы решения задач профессиональной деятельности	1. Найти мощность множества четных чисел. 2. Построить отображение интервала на прямую. 3. Найти норму функции $\sin x$ на отрезке [0,3]. 4. Вычислите интеграл Лебега от неограниченной функции $\int\limits_{(2,3)}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$. 5. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность функций $\{x_n(t)=t^n-t^{2n}\}$. 6. Найдите норму оператора $A\colon C[0,1]\to C[0,1]$,	• *Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены необходимые примеры; студент показывает понимание излагаемого материала – 85 – 100 баллов* • *Полно и правильно даны ответы на все поставленные вопросы, приведены примеры, однако имеются неточности; в целом студент показывает понимание изученного материала – 70 – 84 балла* • *Ответ дан в основном правильно, но недостаточно аргументированы выводы, приведены не все необходимые примеры – 40 - 69 баллов*

	$Ax(t)=\int_0^t \tau x(\tau)d\tau$.	• *Даны неверные ответы на поставленные вопросы – 0 - 39 баллов*

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература:

1. Колмогоров А.Н. **Элементы** теории функций и функционального анализа. - Москва: Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). – Электронный ресурс. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563

2. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — ISBN 978-5-8114-9340-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/189430

б) Дополнительная литература:

1. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613

2) Программное обеспечение

Google Chrome	бесплатное ПО
Яндекс Браузер	бесплатное ПО
Kaspersky Endpoint Security 10	акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022
Многофункциональный редактор ONLYOFFICE	бесплатное ПО
ОС Linux Ubuntu	бесплатное ПО

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

№ п/п	Вид информационного ресурса, наименование информационного ресурса	Адрес (URL)
1	ЭБС «ZNANIUM.COM»	https://znanium.com/
2	ЭБС «ЮРАИТ»	https://urait.ru/
3	ЭБС «Университетская	https://biblioclub.ru/

	библиотека онлайн»	
4	ЭБС IPR SMART	http://www.iprbookshop.ru/
5	ЭБС «ЛАН**Ь**»	http://e.lanbook.com
6	ЭБС ТвГУ	http://megapro.tversu.ru/megapro/Web
7	Репозитарий ТвГУ	http://eprints.tversu.ru
8	Ресурсы издательства Springer Nature	http://link.springer.com/
9	СПС КонсультантПлюс (в сети ТвГУ)	

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Вопросы для подготовки к зачету

1. Понятие мощности множества. Примеры счетных множеств. Теоремы о счётных множествах.
2. Несчётность множества чисел отрезка [0,1]. Множества мощности континуум.
3. Структура ограниченного открытого множества на прямой.
4. Мера открытого ограниченного множества. Основные свойства меры.
5. Мера замкнутого ограниченного множества и её свойства.
6. Внешняя и внутренняя меры ограниченных множеств.
7. Измеримые множества и их свойства.
8. Измеримые функции, основные теоремы об измеримых функциях.
9. Измеримость непрерывных функций.
10. Разные типы сходимости последовательностей измеримых функций.
11. Определение интеграла Лебега.
12. Теорема о среднем, интеграл от константы.
13. Полная аддитивность интеграла Лебега.
14. Свойства интеграла Лебега относительно функций.
15. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
16. Суммируемые функции
17. Понятия меры и интеграла в многомерных пространствах.

18. Неравенства Гёльдера и Минковского.
19. Примеры метрических пространств.
20. Принцип сжатых отображений.
21. Компактность в метрических пространствах.
22. Критерий предкомпактности в пространстве $C[a,b]$.
23. Линейные нормированные пространства, сходимость по норме.
24. Линейные операторы, непрерывность и ограниченность линейного оператора.
25. Норма ограниченного оператора, способы её вычисления.
26. Пространство линейных ограниченных операторов, его полнота.
27. Обратимые операторы. Линейность оператора, обратного линейному.
28. Обратимость оператора, близкого к обратимому.
29. Обратимость оператора $I - A$. Ряд Неймана.
30. Спектр и резольвента оператора.
31. Теорема об открытом отображении.
32. Теорема о замкнутом графике.
33. Теорема Хана-Банаха.
34. Интеграл Стилтьеса. Представление линейного непрерывного функционала над пространством $C[a,b]$ и над пространством $L_p[a,b]$.
35. Понятие гильбертова пространства, примеры.
36. Ортогональные системы в гильбертовых пространствах. Теорема об ортогонализации.
37. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя.
38. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств.
39. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организуя свою учебную работу, студенты должны:

Во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д.

Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями. Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем. Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту.

3. Подготовка к практическим занятиям. При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление глоссария. В глоссарий должны быть включены основные понятия, которые студенты изучают в ходе самостоятельной работы. Для полноты исследования рекомендуется вписывать в глоссарий и те термины, которые студентам будут раскрыты в ходе лекционных занятий.

5. Составление конспектов. В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания использованы схемы и таблицы.

6. Подготовка к зачету. При подготовке к зачету студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе занятий.

Качество усвоения студентом каждой дисциплины оценивается по 100-балльной шкале.

Интегральная рейтинговая оценка (балл) по каждому (периоду обучения) складывается из оценки текущей работы студентов на семинарских и практических занятиях, выполнения индивидуальных творческих заданий и др. и оценки за выполнение студентом учебного задания при рейтинговом контроле успеваемости. При этом доля баллов, выделенных на рейтинговый контроль не должна превышать 50% общей суммы баллов данного модуля (периода обучения).

Максимальная сумма баллов по учебной дисциплине, заканчивающейся зачетом, по итогам семестра составляет 100 баллов (50 баллов – 1-й модуль и 50 баллов – 2-й модуль).

Студенту, набравший 40 баллов и выше по итогам работы в семестре, в экзаменационной ведомости и зачетной книжке выставляется оценка «зачтено». Студенту, набравшему до 39 баллов включительно, сдает зачет,

Согласно подходам балльно-рейтинговой системы в рамках оценки знаний, умений, владений (умений применять) и (или) опыта деятельности дисциплины установлены следующие аспекты:

- Содержание учебной дисциплины в рамках одного семестра делится на два модуля (периода обучения). По окончании модуля (периода обучения) осуществляется рейтинговый контроль успеваемости знаний студентов.
- Сроки проведения рейтингового контроля:

осенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса;

весенний семестр – I рейтинговый контроль успеваемости проводится согласно графику учебного процесса, II рейтинговый контроль успеваемости - две последние недели фактического завершения семестра по графику учебного процесса.

VII. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, *учебная аудитория:* **№ 312** *(170002 Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)*	*Комплект учебной мебели, интерактивная система.*	Google Chrome – бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus – бесплатно OpenOffice – бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО – бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО – бесплатно

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и № протокола заседания кафедры / методического совета факультета, утвердившего изменения
1.	V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	1) Рекомендуемая литература – актуализация списка	Решение научно-методического совета математического факультета (протокол №1 от 20.09.2022 г.)
2.	V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	1) Рекомендуемая литература – актуализация списка	Решение научно-методического совета математического факультета (протокол №1 от 19.09.2023 г.)