

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 16.10.2023 21:40:08  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП  
Н.А. Семькина

*Семькина*  
« 4 » 09  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
УНИВЕРСИТЕТ

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)  
**Функциональный анализ**

**Специальность**

10.05.01 Компьютерная безопасность

**Специализация**

Математические методы защиты информации

Для студентов 3 курса очной формы обучения

Уровень высшего образования

**СПЕЦИАЛИТЕТ**

Составитель:

*И.П. Могилевский*  
к. ф.-м. н. доц. И.П. Могилевский

Тверь 2023

# **I. Пояснительная записка**

## **I. Аннотация**

Курс «Функциональный анализ» – традиционная и важная часть образования математика. Функциональный анализ стал языком многих разделов математики во второй половине 20-го столетия, и знакомство с его основными идеями и методами необходимо для формирования профессионала-математика.

### **1. Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом**

Функциональный анализ

### **2. Цели и задачи дисциплины**

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области функционального анализа и теории функций вещественного переменного;
- 2) умение применять методы функционального анализа при изучении дифференциальных уравнений в частных производных, численных методов и других математических дисциплин;
- 3) овладение математическим языком, который применяется при описании многих задач математики и физики.

### **3. Место дисциплины в структуре ООП**

Курс «Функциональный анализ» является дисциплиной вариативной части. Курс имеет логические и содержательно-методические взаимосвязи со многими дисциплинами ООП. Для освоения дисциплины необходимы знание курсов алгебры, математического анализа и топологии.

### **4. Объём дисциплины:**

4 зачетных единицы, 144 академических часа, **в том числе**  
**контактная работа:** лекции – 38 часов, практические занятия – 38 часов,  
**самостоятельная работа** – 68 часов.

### **5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (или модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

<b>Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые)</b>	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине (или модулю)</b>
--	---

компетенции)	
<p><b>ПК-3</b>  способностью проводить анализ безопасности компьютерных систем на соответствие отечественным и зарубежным стандартам в области компьютерной безопасности</p>	<p><b>Владеть:</b> навыками применения и анализа методов защиты информации.  <b>Уметь:</b> анализировать готовые решения по применению методов и средств защиты информации, используя аппарат функционального анализа.  <b>Знать:</b> основные понятия и определения дисциплины</p>
<p><b>ПК-11</b>  способностью участвовать в проведении экспериментально-исследовательских работ при проведении сертификации средств защиты информации в компьютерных системах по требованиям безопасности информации</p>	<p><b>Владеть:</b> навыками оценки обоснованности выбора методов и средств защиты информации с помощью вычисления и оценки интегралов Лебега, норм линейных операторов, разложения элементов гильбертова пространства по ортонормированному базису.  <b>Уметь:</b> применить методы экспериментальных исследований, обработать результаты экспериментов.  <b>Знать:</b> методику экспериментальных исследований с использованием определения меры и интеграла Лебега, основных понятия теории линейных нормированных пространств.</p>
<p><b>ПК -17</b>  способностью производить установку, наладку, тестирование и обслуживание современного общего и специального программного обеспечения, включая операционные системы, системы управления базами данных, сетевое</p>	<p><b>Владеть:</b> навыками применения программных средств для математической обработки собранной информации, навыками установки и первоначальной настройки прикладных программных средств общего и специального назначения.  <b>Уметь:</b> моделировать и анализировать процессы передачи информации с использованием аппарата функционального анализа.  <b>Знать:</b> основные методы и средства эффективного анализа.</p>

программное обеспечение	
----------------------------	--

**6. Форма промежуточной аттестации**

экзамен

**7. Язык преподавания** русский.

**II. Содержание дисциплины (или модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий  
Для студентов очной формы обучения**

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)
		Лекции	Практические (лабораторные) занятия	
1. Неравенства Гельдера и Минковского.	14	4	3	7
2. Метрические пространства. Полнота.	16	6	4	6
3. Линейные нормированные пространства.	14	3	4	7
4. Линейные ограниченные операторы.	16	4	6	6
5. Обратимость линейных операторов.	14	3	4	7
6. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике.	14	4	3	7
7. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха.	18	4	5	9
8. Гильбертовы пространства. Ортонормированные базисы.	18	5	4	9
9. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.	20	5	5	10
<b>ИТОГО</b>	<b>144</b>	<b>38</b>	<b>38</b>	<b>68</b>

**III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (или модулю)**

*Планы практических (семинарских) занятий и методические рекомендации к ним.*

*Примеры вариантов контрольных работ*

*Тематика курсовых работ*

**IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (или модулю)**

**Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенций**

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков (2-3 примера)	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
владеть	<p>1. Привести примеры полных метрических пространств</p> <p>2. Привести примеры линейных ограниченных операторов и вычислить их нормы.</p>	<p>Приведено несколько примеров и дано логически верное обоснование – 3 балла.</p> <p>Приведены примеры с неполным обоснованием – 2 балла.</p> <p>Приведен один пример без обоснования – 1 балл.</p> <p>Примеров не приведено — 0 баллов.</p>
уметь	<p>1. Оценить квадрат суммы чисел через сумму их квадратов, используя неравенство Гельдера.</p> <p>2. Разложить элемент гильбертова пространства по ортонормированной системе.</p>	<p>Вычисления проведены правильно и рационально – 3 балла.</p> <p>Результат вычислений правильный, но проведены они громоздко – 2 балла.</p> <p>Вычисления проведены с ошибками и не проявлено понимание существа дела --1 балл.</p>

		Отсутствует понимание того, как проводить вычисления – 0 баллов.
знать	<p>1. Привести примеры ортонормированных базисов в гильбертовых пространствах.</p> <p>2. Показать, что в пространстве <math>l_1</math> тождество параллелограмма не выполняется.</p>	<p>Приведены примеры и дано верное обоснование – 2 балла.</p> <p>Примеры приведены. Но обоснование отсутствует – 1 балл.</p> <p>Примеры не приведены – 0 баллов.</p>

#### **V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (или модуля)**

##### а) основная литература

1. Крепкогорский, В.Л. Функциональный анализ : учебное пособие / В.Л. Крепкогорский ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1650-8 ; То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428727>
2. Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной. [Электронный ресурс] / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2012. — 544 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/3173>

##### б) дополнительная литература

1. Ревина С.В. Функциональный анализ в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.В. Ревина, Л.И. Сазонов. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный

университет, 2009. — 120 с. — 978-5-9275-0683-5. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47190.html>

2. Глазырина П.Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи [Электронный ресурс] : учебное пособие / П.Ю. Глазырина, М.В. Дейкалова, Л.Ф. Коркина. — Электрон. текстовые данные. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 216 с. — 978-5-7996-1771-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/66213.html>

## **VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. ЭБС Лань <https://e.lanbook.com/> Договор № 4-е/23 от 02.08.2023 г.
2. ЭБС Znanium.com <https://znanium.com/> Договор № 1106 эбс от 02.08.2023 г.
3. ЭБС Университетская библиотека online <https://biblioclub.ru> Договор № 02-06/2023 от 02.08.2023 г.
4. ЭБС ЮРАЙТ <https://urait.ru/> Договор № 5-е/23 от 02.08.2023 г.
5. ЭБС IPR SMART <https://www.iprbookshop.ru/> Договор № 3-е/23К от 02.08.2023 г.

## **VII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)**

- 1) лекционные занятия в аудитории, с использованием мультимедийной установки;
- 2) практические занятия с использованием средств мультимедиа;
- 3) использование необходимого программного обеспечения (в частности, Microsoft Visual Studio и Microsoft Office).

## **VIII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

### **Планы практических занятий**

1. Метрические пространства. Сходимость в метрических пространствах. Поточечная и равномерная сходимость последовательностей непрерывных функций. Предельный переход под знаком интеграла. Примеры полных и неполных метрических пространств.

2. Линейные ограниченные операторы. Норма линейного оператора. Различные типы сходимостей последовательностей линейных операторов.

3. Гильбертовы пространства. Теорема Пифагора. Тождество параллелограмма. Пространства со скалярным произведением, не являющиеся гильбертовыми. Ортогональные базисы. Процедура ортогонализации Грамма-Шмидта.
4. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Разложение функций в ряд Фурье по тригонометрической системе. Разложение последовательностей в ряд. Равенство Парсеваля.
5. Линейные функционалы в гильбертовых пространствах. Вычисление нормы линейного функционала. Последовательности линейных функционалов.

#### Перечень вопросов для подготовки к экзамену (зачету)

1. Неравенства Гельдера и Минковского.
2. Метрические пространства.
3. Линейные нормированные пространства.
4. Линейные ограниченные операторы.
5. Обратимость линейных операторов.
6. Линейные ограниченные функционалы.
8. Теорема Хана-Банаха.
9. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы.
10. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Неравенство Бесселя.
11. Линейные ограниченные функционалы в гильбертовых пространствах.
12. Теорема Ф.Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством.

#### Контрольные работы по функциональному анализу

##### Контрольная работа № 1: метрические пространства, компактность

1. Докажите, что указанная функция является метрикой в  $R^2$  и изобразите в этой метрике единичный шар с центром в начале координат:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

1. Докажите, что функция  $\rho(x, y) = |\arctg(1 + x) - \arctg(1 + y)|$  является метрикой на прямой выясните, является ли пространство  $(R, \rho)$  полным.

2. Является ли предкомпактным множество функций  $\{x_n(t) = t^n\}$  в пространстве  $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ?
3. Сходится ли в пространстве  $C[0,1]$  последовательность функций  $\{x_n(t) = t^n - t^{2n}\}$ .

### Контрольная работа № 2: линейные операторы и функционалы

1. Найдите норму оператора  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ,  $Ax(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$ .
2. Пусть задана последовательность действительных чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ . При каких условиях на эти числа оператор  $A: l_2 \rightarrow l_2$ ,  $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$  является ограниченным и какова его норма?
3. Пусть задана последовательность линейных операторов  $A_n: l_2 \rightarrow l_2$ ,  $A_n x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}, \dots)$ . Имеет ли эта последовательность предел в пространстве линейных ограниченных операторов и, если да, то каков характер сходимости?
4. Пусть  $M$  -- равномерно ограниченное множество функций из пространства  $C[0, 1]$ , такое, что для всех функций  $x \in M$  выполняется неравенство  $|x(t_1) - x(t_2)| \leq K|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1]$  с одной и той же константой  $K$ . Докажите, что множество  $M$  компактно в пространстве  $C[0, 1]$ .

### Тематика курсовых работ

- Теорема о «почти перпендикуляре».
- Область определения, область значений, ядро оператора.
- Связь понятий «оператор», «отображение» и «функционал».
- Определение непрерывного оператора (по Коши, по Гейне, на множестве).
- Линейный оператор: определение, свойства.
- Ограниченные операторы.
- Критерий ограниченности линейного оператора.
- Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора.
- Ограниченность линейного оператора в конечномерном пространстве.

- Определение линейной структуры пространства операторов. • Норма оператора.
- Вычисление нормы операторов.
- Полнота пространства операторов.
- Типы сходимостей последовательностей операторов. Связь между ними. • Принцип равномерной ограниченности.
- Теорема Банаха-Штейнгауза.
- Теоремы Хана-Банаха о продолжении.
- Определение евклидова пространства.
- Неравенство Коши-Буняковского.
- Норма в евклидовом пространстве.
- Непрерывность линейных операций и скалярного произведения в евклидовом пространстве. Угол между элементами.
- Ортогональные элементы.
- Определение ортогональной, ортонормированной систем.
- Связь ортогональности и линейной независимости.
- Процесс ортогонализации Шмидта.
- Существование не более чем счетного базиса в сепарабельном пространстве.
- Ряд Фурье элемента евклидова пространства.
- Неравенство Бесселя.
- Определение замкнутой системы.
- Равенство Парсеваля.
- Свойство минимальности коэффициентов Фурье.
- Эквивалентность полноты и замкнутости ортонормированной системы в сепарабельном пространстве.
- Теорема Рисса.
- Определение гильбертова пространства.
- Изоморфизм гильбертовых пространств.

- Подпространства гильбертова пространства.
- Ортогональное дополнение.
- Разложение элемента гильбертова пространства по подпространствам.
- Равенство параллелограмма.
- Характеристическое свойство евклидова пространства.
- Теорема о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

- Построение сопряженного оператора.
- Линейность и ограниченность сопряженного оператора.
- Свойства операции сопряжения.
- Самосопряженные операторы: определение, свойства.
- Неотрицательные операторы.
- Обратимость оператора.
- Критерий взаимной однозначности оператора.
- Линейность обратного оператора. РПД «Функциональный анализ»
- Критерий существования обратного оператора.
- Непрерывно обратимые операторы.
- Ограниченность обратного оператора. • Левый и правый обратный операторы.
- Связь с существованием и единственностью решения уравнения.
- Теорема Банаха об обратном операторе.

**VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)**

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов.

Программное обеспечение:

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
--	--

<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 312 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Google Chrome бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus бесплатно OpenOffice бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО бесплатно</p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 314 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Google Chrome бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows Акт на передачу прав ПК545 от 16.12.2022 Lazarus бесплатно OpenOffice бесплатно Многофункциональный редактор ONLYOFFICE бесплатное ПО бесплатно ОС Linux Ubuntu бесплатное ПО бесплатно</p>

### **IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

<p><b>Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы</b></p>	<p><b>Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы</b></p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 312 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Набор учебной мебели, меловая доска, Переносной ноутбук, Интерактивная система Promethean ActivBoard 587</p>
<p>Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, Учебная аудитория № 314 (Корпус 3, 170002, Тверская обл., г.Тверь, пер. Садовый, дом 35)</p>	<p>Набор учебной мебели, меловая доска, Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2): Проектор Casio XJ-140 настенный проекц. экран Lumien 180*180, Ноутбук Dell N4050, сумка 15,6", мышь; Усилитель Roxton AA-120; Радиосистема Shure PG288/PG58; Микшер Mackie 402 VLZ; Стационарный микрофон SOUNDKING EG002 с настольным держателем; Мультимедийный проектор Casio XJ-H2650 с потолочным креплением и моториз. экраном;</p>

**Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины (или модуля)**

<b>№п. п.</b>	<b>Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (или модуля)</b>	<b>Описание внесенных изменений</b>	<b>Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения</b>
1.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Обновление списка литературы.	Протокол № 11 от 26.06.2013
2.	VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	Корректировка планов практических (семинарских) занятий и методических рекомендаций к ним.	Протокол № 10 от 24.06.2014
3.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Обновление списка литературы. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 27.09.2015
4.	VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.	Корректировка планов практических (семинарских) занятий и методических рекомендаций к ним.	Протокол № 1 от 01.09.2016
5.	I - X	Корректировка всех разделов в соответствии с новым стандартом	Протокол № 6 от 28.02.2017
6.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы,	Дополнение списков. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 01.09.2017

	необходимой для освоения дисциплины		
7.	V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Дополнение списков. Обновление ссылок из ЭБС.	Протокол № 1 от 01.09.2023