

I. Аннотация

1. Цель и задачи дисциплины:

Дискретная математика включает в себя ряд разделов математики, которые стали интенсивно развиваться в середине XX-го века в связи с необходимостью создания сложных управляющих систем и бурным прогрессом вычислительной техники.

Главная цель курса — это обучить студентов методам мышления, характерным для дискретной математики, основным понятиям таких ее дисциплин как комбинаторика, булевы функции и формулы, теория графов, представления булевых функций с помощью схем и диаграмм, конечные автоматы и алгоритмы (структурированные программы и машины Тьюринга). Ещё одной целью курса является развитие у студентов навыков алгоритмического мышления на примерах решения задач из указанных разделов дискретной математики и обучение их алгоритмам решения ряда типовых задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина входит в раздел «Математический» обязательной части блока 1.

Предварительные знания и навыки. Знание школьных курсов математики и информатики

Дальнейшее использование. Полученные знания используются в последующем при изучении предметов: «Математическая логика и теория алгоритмов», «Теория автоматов и формальных языков» и других.

3. Объем дисциплины: 9зач.ед., 324акад. ч., в том числе:

контактная аудиторная работа лекций 62 ч., практических занятий 62 ч., лабораторных занятий 0 ч.;

контактная внеаудиторная работа контроль самостоятельной работы 10 ч., в том числе курсовая работа 10 ч.; **самостоятельная работа** 190 ч., в том числе контроль 68 ч.

4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1, Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1, Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие УК-1.2, Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи УК-1.3, Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов УК-1.4, При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения УК-1.5, Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки
ОПК-1, Способен применять естественнонаучные и инженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Демонстрирует знания основ математики, физики, вычислительной техники и программирования ОПК-1.2, Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования ОПК-1.3 Демонстрирует навыки теоретического и экспериментального исследования объектов

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения:

курсовая работа — 2 семестр, экзамен — 1-2 семестр

6. Язык преподавания:

русский

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Для студентов очной формы обучения

Учебная программа — наименование разделов и тем	Всего	Лк	Пр	Лб	КСР	Сам
Элементы теории множеств и комбинаторики	41	9	14	0	0	18
Логика высказываний и булевы функции	53	11	10	0	0	32
Элементы логики предикатов	31	6	6	0	0	19
Графы	73	12	10	0	0	51
Конечные автоматы	52	12	14	0	0	26
Алгоритмы	74	12	8	0	10	44
Итого	324	62	62	0	10	190

Учебная программа дисциплины

1. Элементы теории множеств и комбинаторики

- Множества, общее понятие, способы записи множеств, подмножества, множество подмножеств. Основные операции с множествами (объединение, пересечение, разность), основные тождества
- Декартовы произведения, отношения. Отношения эквивалентности и порядка. Функции, равномоощные множества. Теорема Кантора.
- Математическая индукция
- Комбинаторика: перестановки, размещения, сочетания, разности
- Лексикографический порядок

2. Логика высказываний и булевы функции

- Булевы функции, определения, способы задания, примеры. Количество БФ
- Формулы ЛВ, синтаксис и семантика. Построение формулы по тексту. Задание БФ с помощью формул ЛВ
- Следование и эквивалентность. Основные эквивалентности ЛВ. Тожественная истинность, выполнимость, тождественная ложность
- Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы. Совершенные КНФ и ДНФ. Тожественная истинность КНФ и выполнимость ДНФ. Построение ДНФ и КНФ по булевой функции
- Сокращённые ДНФ, метод Блейка
- Полиномы Жегалкина, определение, построение, единственность
- Полнота множества булевых функций. Замкнутость классов. Классы B_0 , B_1 , L , S , M
- Теорема Поста

3. Элементы логики предикатов

- Определение формулы, примеры формул

- Семантика ЛП, интерпретации. Тожественная истинность, выполнимость, тождественная ложность
 - Следование и эквивалентность в ЛП. Замена переменных, замена кванторов и перестановка кванторов
 - Эквивалентности логики предикатов. Предварённая форма
4. Графы
- Графы. Представления графов: матрицы смежности, списки смежности. Примеры использования графов
 - Пути и циклы. Отношение достижимости. Транзитивное замыкание графа. Компоненты связности и сильной связности. Отношение достижимости на компонентах сильной связности. Теорема о базе графа
 - Плоские графы, определение, примеры. Теорема Куратовского без доказательства. Развертка многогранника в плоский граф. Формула Эйлера. Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Критерий
 - Хроматическое число. Двудольность, критерий. 5-раскраска плоских графов
 - Неориентированные деревья. Различные определения неориентированных деревьев и их эквивалентность
 - Размеченные графы. Минимальное остовное дерево, определение. Алгоритм Крускала и его модификации
 - Ориентированные деревья. Различные определения, эквивалентность. Ориентация неориентированного дерева. Поиск в глубину
 - Алгоритм Дейкстры
5. Конечные автоматы
- Алфавиты, слова, языки
 - Конечные преобразователи, детерминированные и недетерминированные автоматы. Определения и примеры
 - Способы задания конечных автоматов: таблицы и диаграммы.
 - Детерминизация НКА
 - Регулярные выражения, примеры
 - Эквивалентность регулярных выражений и конечных автоматов
 - Операции над языками. Замкнутость автоматных языков: конкатенация, дополнение и объединение автоматных языков, пересечение и итерация автоматных языков, кодирования автоматных языков
 - Лемма о разрастании, доказательство неавтоматности языка
 - Проблема однозначности кодирования
6. Алгоритмы

- Машины Тьюринга. Семантика машин Тьюринга
- Преобразования машин Тьюринга. Стандартная заключительная конфигурация. Односторонняя машина Тьюринга, многоэтажная лента
- Моделирование программ с метками и машин Тьюринга друг с помощью друга
- Другие примеры формализаций алгоритма. Тезис Тьюринга-Черча
- Неразрешимые проблемы: мощностные соображения, самоприменимость, остановка, функция усердного бобра, проблема оптимального сжатия
- Универсальная машина Тьюринга

III. Образовательные технологии

Учебная программа — наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
Элементы теории множеств и комбинаторики	лекции, практические занятия	Изучение теоретического материала, решение задач
Логика высказываний и булевы функции	лекции, практические занятия	Изучение теоретического материала, решение задач
Элементы логики предикатов	лекции, практические занятия	Изучение теоретического материала, решение задач
Графы	лекции, практические занятия	Изучение теоретического материала, решение задач
Конечные автоматы	лекции, практические занятия	Изучение теоретического материала, решение задач
Алгоритмы	лекции, практические занятия	Изучение теоретического материала, решение задач

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикаторов УК-1.1, УК-1.2

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь формализовать знания в виде логических формул	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <p>в следующем тексте выделить простые высказывания, обозначить их с помощью пропозициональных переменных и записать этот текст в виде формулы.</p> <p>Паша хочет завести дома животное: скорпиона, каракатицу или гадюку. Для каракатицы нужно купить аквариум, а для скорпиона или гадюки — террариум. Чтобы прокормить скорпиона Паше придется покупать тараканов, чтобы прокормить</p>	<p>оценка 3 — выделяет элементарные высказывания и строит некоторые простейшие формулы, оценка 4 — кроме того правильно связывает формулы друг с другом, оценка 5 — полностью</p>

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
	<p>гадюку — мышей, а для каракатицы — рыбу. За аквариумом и рыбой нужно будет идти в магазин «Мир Нептуна», а за террариумом, тараканами и мышами — в магазин «Мир Плутона». Для поездок в любой из магазинов придется вызывать такси.</p> <p>Предметной областью является множество точек на евклидовой плоскости; $L(x, y, z)$ означает, что точки x, y, z попарно различны и лежат на одной прямой, причём y — между x и z; $E(x, y, z, u)$ означает, что длины отрезков xu и zu равны. Записать формулу, имеющую четыре свободные переменные a, b, c, d и означающую, что точки a, b, c образуют треугольник, а в точке d пересекаются его медианы. Пояснить значение отдельных частей формулы.</p>	правильно выполняет формализацию

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора УК-1.3

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Владеть базовыми навыками самостоятельного поиска и изучения информации	<p>Возможные темы для самостоятельного изучения</p> <ul style="list-style-type: none"> • Алгоритмы логического вывода для хорновских формул • Соотношения между логикой предикатов и языками запросов к базам данных • Использование логических схем для представления булевых функций 	оценка 3 — способен самостоятельно найти требуемую информацию, оценка 4 — кроме того, способен изучить найденные сведения, оценка 5 — кроме того, способен применить полученные знания для решения конкретных задач

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора УК-1.4

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь определять истинность и ложность формул	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <p>построить таблицу истинности для формулы $(a \vee b) \wedge L(b \wedge (\neg c \vee (a \wedge L b)))$. Определить, является ли она тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой, пояснить.</p> <p>Предметной областью является множество действительных чисел. $A(x, y, z)$ означает $x + y = z$, $M(x, y, z)$ — $y = z$. Определить, будет ли в такой интерпретации истинна следующая формула, ответ пояснить: $M(x, x, y) \wedge L(\neg z) \wedge (M(x, x, y) \wedge z = y)$</p>	оценка 3 — умеет определять истинность формул логики высказываний в простейших случаях, оценка 4 — умеет определять истинность формул логики высказываний и в простейших случаях логики предикатов, оценка 5 — умеет определять истинность формул логики предикатов

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора УК-1.5

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Знать понятия булевой функции, формулы логики высказываний, истинности и ложности формул, эквивалентности формул	<p>Список вопросов к экзамену</p> <ul style="list-style-type: none"> • Булевы функции. Задание булевых функций таблицами. Лексикографический порядок. • Формулы логики высказываний. Синтаксис и семантика. Основные булевы связи: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание, сложение по модулю 2. • Основные эквивалентности логики высказываний. • Элементарные конъюнкции и дизъюнкции. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные ДНФ. Построение КНФ и ДНФ по булевой функции. • Сокращённая ДНФ. Построение сокращённой ДНФ методом Блейка. • Многочлены Жегалкина. Построение многочлена Жегалкина по булевой функции методом неопределённых коэффициентов. 	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания оценка 3 — знает понятия булевой функции, булевой формулы, истинности оценки 4 — знает нормальные формы, основные эквивалентности логики высказываний, замкнутые классы булевых функций оценка 5 — знает теоремы о булевых функциях и формулах логики высказываний и их доказательства: теорема Поста, о корректности метода Блейка
Уметь выполнять эквивалентные преобразования булевых формул, строить нормальные формы, определять полноту системы булевых функций	<ul style="list-style-type: none"> • Суперпозиция булевых функций. Замкнутые относительно суперпозиции классы булевых функций. Полная системы булевых функций. • Классы булевых функций, сохраняющих 0, сохраняющих 1, линейных, самодвойственных, монотонных. • Теорема Поста о полноте множества булевых функций. <p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Построить для функции f из следующего задания эквивалентные совершенную КНФ, совершенную ДНФ, сокращённую ДНФ и многочлен Жегалкина. • При лексикографическом упорядочении наборов аргументов булевы функции f и g задаются следующими значениями: $f = (11110101)$, $g = (10011001)$. Проверить для каждой из функций все пять свойств, упоминаемых в теореме Поста. Сделать вывод о полноте или неполноте множества $\{f, g\}$. Если это множество полно, показать, как можно представить отрицание и конъюнкцию (или дизъюнкцию). Если неполно — указать, какая булева функция не может быть построена. 	оценка 3 — умеет пользоваться эквивалентностями, строить ДНФ и КНФ, оценка 4 — кроме того умеет использовать основные эквивалентности и теорему Поста, оценка 5 — кроме того умеет строить многочлен Жегалкина и сокращённую ДНФ
Знать понятия предиката, формулы логики предикатов, истинности формулы логики предикатов	<p>Список вопросов к экзамену</p> <ul style="list-style-type: none"> • Формулы логики предикатов. Синтаксис. Атомные формулы, кванторы, свободные и связанные переменные. • Семантика логики предикатов. Интерпретации. Значение формул в интерпретации. Следование и эквивалентность. Тожественная истинность и тождественная ложность. • Основные эквивалентности логики предикатов. Предварённая форма. 	оценка 3 — знает синтаксис и семантику простейших формул логики предикатов, оценка 4 — кроме того имеет представление о подформулах, свободных и связанных переменных, оценка 5 — кроме того знает основные эквивалентности логики предикатов

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ОПК-1.1

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Знать понятие множества и основные свойства множеств, принцип математической индукции, формулы комбинаторики	<p>Список вопросов к экзамену</p> <ul style="list-style-type: none"> • Множества, операции над ними. Объединение, пересечение, разность, декартово произведение, декартова степень. Подмножества. Основные свойства теоретико-множественных операций. • Функции и отношения. Мощность множества. Равномощные множества. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств. • Принцип математической индукции. Прямая и обратная индукция. • Основные элементы комбинаторики: перестановки, размещения с повторениями и без повторений, сочетания. Формулы для количества объектов каждого вида. 	<p>оценивания, шкала оценивания оценка 3 — знает некоторые действия с множествами, простейший вариант принципа математической индукции, некоторые комбинаторные формулы оценка 4 — знает основные действия с множествами и некоторые их свойства, некоторые разновидности принципа математической индукции, основные комбинаторные формулы оценка 5 — знает действия с множествами, свойства этих действий, различные варианты принципа математической индукции, формулы для всех основных комбинаторных объектов</p>
Знать понятие графа, основные свойства графов	<p>Список вопросов к экзамену</p> <ul style="list-style-type: none"> • Графы. Способы представления графов. Размеченные графы. • Пути и циклы. Эйлеровы графы. Транзитивное замыкание графа. Вычисление транзитивного замыкания с помощью матрицы смежности. • Неориентированные графы. Плоские графы, формула Эйлера для плоских графов. Развертка многогранника. • Компоненты связности. Связные неориентированные графы. Хроматическое число. Двудольность. 5-раскраска плоских графов. • Ориентированные графы. Компоненты сильной связности. База графа. • Неориентированные деревья. Различные определения и их эквивалентность. Минимальное остовное дерево. Алгоритм Крускала. • Ориентированные деревья. Различные определения и их эквивалентность. Ориентация неориентированного дерева. Поиск в глубину. • Алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей. • Критерий однозначности кодирования. 	<p>оценка 3 — знает понятия ориентированного и неориентированного графа, некоторые способы их задания и некоторые из свойств графов, некоторые алгоритмы работы с графами оценка 4 — кроме того знаком с различными способами представления графов, знает основные взаимосвязи между свойствами графов, алгоритмы Крускала, поиска в глубину, Дейкстры, оценка 5 — кроме того знает доказательства перечисленных выше утверждений и корректности алгоритмов</p>
Знать понятия конечного автома-	Список вопросов к экзамену	оценка 3 — знает понятие детерминированно-

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
та, регулярного выражения, языка	<p>Конечные преобразователи и автоматы. Конфигурации автоматов.</p> <p>Детерминизация недетерминированного автомата. Конкатенация, дополнение, объединение, пересечение и итерация автоматных языков.</p> <p>Однородности автоматных языков, гомоморфизмы и прообразы.</p> <p>Регулярные выражения. Преобразование конечных автоматов и регулярных выражений друг в друга.</p> <p>Лемма о разрастании. Неавтоматные языки.</p>	<p>го КА и распознаваемого им языка, оценка 4 — знает понятия детерминированного и недетерминированного КА, конечно-го преобразователя, регулярного выражения, взаимосвязь между ними, свойства регулярных языков оценка 5 — кроме того знает доказательства перечисленных утверждений</p>
Знать некоторые математические модели алгоритмов (машины Тьюринга), иметь понятие об алгоритмической разрешимости и неразрешимости проблем	<p>Набор вопросов к экзамену</p> <p>Машины Тьюринга. Конфигурации. Результат вычисления машины Тьюринга.</p> <p>Стандартная заключительная конфигурация. Односторонние машины и многоэтажная лента.</p> <p>Взаимное моделирование программ с метками и машин Тьюринга.</p> <p>Неразрешимые проблемы: мощность множеств вычислимых и невычислимых функций, проблемы самоприменимости, остановки, усердного бобра и оптимального сжатия.</p> <p>Универсальная машина Тьюринга.</p>	<p>оценка 3 — знает понятие машины Тьюринга и их семантику, оценка 4 — кроме того, знает основные возможности преобразования машин Тьюринга, оценка 5 — кроме того, знает примеры неразрешимых проблем и доказательства перечисленных утверждений</p>

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ОПК-1.2

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
Уметь использовать принцип математической индукции и формулы комбинаторики для решения задач	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Числа Фибоначчи задаются как $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$. Доказать, что F_i делится на 3 тогда и только тогда, когда i делится на 4. • Группе из 12 человек нужно раздать 30 разных конфет так, чтобы каждому досталось по две (шесть конфет останутся нерозданными). Сколькими способами это можно сделать? 	<p>оценка 3 — умеет выполнять некоторые действия с множествами, может использовать принцип математической индукции и комбинаторные формулы для простейших задач, оценка 4 — умеет выполнять основные действия с множествами и пользоваться некоторыми свойствами этих операций, может использовать принцип математической индукции и комбинаторные формулы</p>

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
		<p>для основных типов задач, оценка 5 — умеет выполнять различные действия с множествами и пользоваться различными их свойствами, может использовать принцип математической индукции и комбинаторные формулы для различных типов задач</p>
<p>Уметь использовать простейшие алгоритмы работы с графами</p>	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <p>ан неориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{(a, d, 1), (a, f, 3), (a, g, 4), (b, c, 2), (b, d, 2), (b, e, 6), (b, g, 3), (b, h, 5), (c, d, 9), (c, f, 3), (c, g, 5), (d, e, 2), (d, g, 6), (d, h, 3), (e, g, 6), (f, g, 5), (g, h, 4)\}$ (третий элемент указывает вес соответствующего ребра). Построить матрицу смежности графа, изобразить граф. Раскрасить вершины графа в минимально возможное число цветов, проверить, будет ли граф эйлеровым (полуэйлеровым).</p> <p>ля графа из предыдущей задачи с помощью алгоритма Крускала по шагам построить минимальное остовное дерево.</p> <p>ля графа из предыдущей задачи с помощью алгоритма поиска в глубину по шагам построить остовное дерево, начиная с вершины b.</p> <p>ан ориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{(a, e, 2), (b, a, 4), (b, d, 1), (b, f, 1), (c, a, 3), (c, b, 4), (c, e, 6), (c, f, 2), (d, c, 3), (d, e, 1), (d, g, 3), (e, a, 3), (e, g, 4), (e, h, 3), (f, a, 3), (f, e, 3), (f, g, 7), (g, h, 2)\}$ (третий элемент указывает вес соответствующего ребра). Построить матрицу смежности графа, изобразить граф. Найти компоненты сильной связности.</p>	<p>оценка 3 — умеет использовать некоторые из алгоритмов, оценка 4 — умеет применять алгоритмы для решения основных задач в типовых случаях, оценка 5 — умеет применять различные алгоритмы исходя из особенностей задачи</p>

Типовые контрольные задания и/или критерии для проверки индикатора ОПК-1.3

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
<p>Уметь описывать простейшие языки с помощью конечных автоматов и регулярных выражений</p>	<p>Примеры задач для контрольных работ:</p> <ul style="list-style-type: none"> Для следующего языка L в алфавите $\{a, b, c\}$ построить детерминированный конечный автомат, который распознает L, и регулярное выражение, которое задаёт L. Пояснить. Язык L состоит из всех слов w, в которых первые три буквы попарно различны, а между соседними буквами a имеется чётное количество a. Доказать, что следующий язык K в алфавите $\{a, b, c\}$ не 	<p>оценка 3 — умеет строить детерминированный КА для распознавания заданного языка, оценка 4 — кроме того умеет строить регулярное выражение, задающее язык, оценка 5 — кроме того, может применять лем-</p>

Требования к обучающемуся	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания, шкала оценивания
	является автоматным: $K = \{a^n + 2c * b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$	му о разрастании для доказательства нерегулярности языка
Уметь реализовывать простейшие алгоритмы с использованием машин Тьюринга	<p>возможные темы заданий для курсовой работы</p> <p>реализовать машину Тьюринга со стандартной заключительной конфигурацией для выполнения следующей задачи. На вход подаётся множество слов в алфавите $\{a, b, c\}$, разделённых одним пустым символом. На выходе должны быть написаны номера входных слов в двоичной системе, в которых количества букв a и b совпадают. Для каждого фрагмента программы необходимо дать подробное пояснение выполняемых действий.</p> <p>темы задач для контрольных работ:</p> <p>написать машину Тьюринга, которая удаляет (со сдвигом) все вхождения буквы a во входном слове, окружённые с двух сторон одинаковыми буквами, отличными от a. Входные слова в алфавите $\{a, b, c\}$. Можно расширять используемый алфавит.</p> <p>равосторонняя машина Тьюринга — это односторонняя машина, которая способна выполнять команды трех видов: $q, ab \wedge p, c, 0$; $q, ab \wedge p, c, +1$; $q, ab \wedge p, c, \text{rewind}$. Здесь a — символ в текущей ячейке, b — стоящий справа от нее, c — символ, который записывается в текущую ячейку. При выполнении последней команды головка оказывается в начальной ячейке. Доказать, что любая вычислимая на обычной односторонней машине Тьюринга функция вычислима и на правосторонней.</p>	<p>оценка 3 — умеет реализовывать простейшие алгоритмы работы со словами, оценка 4 — умеет реализовывать основные арифметические операции, оценка 5 — комбинировать различные возможности машин Тьюринга для построения сложных алгоритмов</p>

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение

дисциплины

1. Рекомендованная литература

а) Основная литература

- [1] Дехтярь М.И. Лекции по дискретной математике [Электронный ресурс] : учебник / Дехтярь М.И., Дудаков С.М., Карлов Б.Н. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — Тверь : Тверской государственный университет, 2019. — 512 с. — Режим доступа: <http://texts.lib.tversu.ru/texts/147783ucheb.pdf>
- [2] Задачник по дискретной математике : учебное пособие / М. И. Дехтярь, Б. Н. Карлов ; ФГБОУ ВПО «Твер. гос. ун-т». — Тверь : Тверской государственный университет, 2013. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) — Режим доступа: <http://texts.lib.tversu.ru/texts/09572uchebd.pdf>

б) Дополнительная литература

- [3] Дискретная математика. Углубленный курс: учебник / под ред. А.В. Чечкина. - М: КУРС : ИНФРА-М, 2020. - 278 с. — Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?bookM015049>
- [4] Мальцев И.А. Дискретная математика [Электронный ресурс] : . —

Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2011. — 304 с. — Режим доступа:

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=638 — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).

- [5] Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике [Электронный ресурс] : / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2009. — 420 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2157 — Загл. с экрана (ЭБС ЛАНЬ).

2. Программное обеспечение

Наименование помещений	Программное обеспечение
Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Перечень программного обеспечения (со свободными лицензиями): Linux OpenSuse Tumbleweed, KDE, TeXLive, Mozilla Firefox, TeXStudio, Qt, QtCreator, Gcc, Python, Eric, LibreOffice, Cervisia, Kdbg, Umbrello, wxMaxima, Blender, digikam, GIMP, Gwenview, hugin, Inkscape, Okular, showFoto, Kmail, Konqueror, Konversation, Kopete, TigerVNC viewer, Amarok, K3b, Kdenlive, VLC media player, Kontakt, Korganizer, Yast, Ark, Dolphin, Info Center, Kget, Konsole, Krusader, Midnight commander, OpenJDK, pgsadmin3, Xterm, Emacs, Kate, Kcalc, Kpgp, Kleopatra, Kompare, Sweeper, Perl, Apache, PostgreSQL, MariaDB, SQLite, PHP

3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- [1] ЭБС «ZNANIUM.COM» <http://www.znanium.com>
- [2] ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <https://biblioclub.ru>
- [3] ЭБС IPRbooks <http://www.iprbookshop.ru>
- [4] ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com>
- [5] ЭБС BOOK.ru <https://www.book.ru>
- [6] ЭБС ТвГУ <http://megapro.tversu.ru/megapro/Web>
- [7] Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (подписка на журналы) https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp
- [8] Репозиторий ТвГУ <http://eprints.tversu.ru>

4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- [1] Discrete Mathematics Tutorial, https://www.tutorialspoint.com/discrete_mathemat:
- [2] Московский центр непрерывного математического образования, <http://www.mccme.ru/>

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Темы практических занятий

1. Подмножества, равенство множеств
2. Декартовы произведения, отношения эквивалентности и порядка, функции
3. Функции, равномощные множества
4. Математическая индукция
5. Математическая индукция
6. Комбинаторика
7. Комбинаторика
8. Построение формул ЛВ, вычисление значения формул ЛВ
9. Построение формул ЛВ, вычисление значения формул ЛВ. Построение ДНФ
10. Построение ДНФ, КНФ, сокращенной ДНФ, многочленов Жегалкина
11. Линейность, самодвойственность, монотонность
12. Теорема Поста. Полные множества
13. Построение формул ЛП
14. Построение формул ЛП
15. Определение истинности формул ЛП
16. Представление графов. Матрица смежности. Построение матрицы достижимости. Задачи на связность
17. Задачи на связность
18. Раскраска, эйлеровость. Неориентированные деревья, алгоритм Крускала и модификации
19. Ориентированные деревья. Различные определения, эквивалентность. Поиск в глубину
20. Алгоритм Дейкстры.
21. Построение конечных преобразователей и детерминированных конечных автоматов
22. Построение конечных преобразователей и детерминированных конечных автоматов
23. Построение и анализ регулярных выражений
24. Построение конечного автомата по регулярному выражению, детерминизация НКА
25. Замкнутость автоматных языков
26. Лемма о разрастании
27. Лемма о разрастании. Проблема однозначности кодирования
28. Построение машин Тьюринга

29. Построение машин Тьюринга
30. Преобразования машин Тьюринга
31. Преобразования машин Тьюринга

Примеры задач для подготовки к контрольным работам

1. Программист Петр использовал в своей программе три целочисленные переменные x , y и z . В определенном месте программы он поместил условный оператор: IF ($x * y \wedge 0$) OR ($z \wedge 0$) THEN $x = 1$ ELSE $x = 2$;

Проанализировав свою программу Петр установил, что перед выполнением этого оператора выполнены следующие условия:

- если $x \wedge 0$, то $z < 0$ или $y < 0$;
- $x \wedge 0$ или $z \wedge 0$;
- если $z < 0$, то хотя бы одна из переменных y , x неотрицательна, но не обе вместе.

Опишите знания Петра в виде булевой формулы. Может ли он оптимизировать программу, заменив указанный условный оператор на присвоение $x = 1$ или на присвоение $x = 2$? Если «да», то на какое?

2. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:

$$\{(10010110), (01111100), (00010011)\}.$$

3. Длиной многочлена Жегалкина называется число его слагаемых (элементарных конъюнкций). Например, $p(X_1, X_2) = 1 + X_1 + X_1 * X_2$ имеет длину 3. Сколько существует различных многочленов Жегалкина от n переменных длины k , которые обращаются в 0 на наборах $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$, состоящих из одних нулей и единиц, соответственно? Привести доказательство.

4. Построить для заданного нагруженного неориентированного графа G минимальное остовное дерево.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, E = \{(1, 2; 15), (1, 3; 2), (1, 4; 8), (1, 7; 9), (2, 3; 4), (2, 5; 9), (2, 9; 8), (3, 4; 6), (6, 3; 5), (6, 5; 7), (6, 4; 3), (6, 8; 16), (4, 7; 10), (4, 8; 8), (7, 8; 7), (8, 9; 15)\}.$$

Здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его «вес» $c(u, v) = D$.

5. Определить является ли заданный неориентированный граф $G = (V, E)$ двудольным. Если он не двудольный, то каково минимальное число ребер, которые нужно из него удалить, чтобы он стал двудольным? Приведите обоснование ответа.

$$V = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m, n\}, E = \{(a, h), (a, n), (a, k), (b, k), (b, f), (b, t), (c, k), (c, h), (e, f), (e, g), (f, a), (f, m), (g, m), (m, n)\}.$$

6. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V = \{a, b, c, d, e, f\}, E)$ и выделенной вершины $a \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в

остальные вершины G и построить дерево этих путей.

	a	b	c	d	e	f	\backslash
	0	25	5	26	53	75	
	12	0	oo	oo	120	40	
	oo	15	0	20	47	60	
	o	o	o	0	30	45	
	o	o	75	20	0	20	
\backslash	40	15	15	26	o	0	y

7. Построить упорядоченную бинарную диаграмму решений, реализующую функцию: $P(x_1, x_2, x_3) = 1 \wedge$ число единиц среди аргументов нечётно (т.е. $(x_1 + x_2 + x_3)$ — нечетное число). Определите сложность (число вершин, помеченных переменными) в получившейся диаграмме («хорошее» решение — диаграмма с 5 такими вершинами).
8. Пусть в интерпретации I логики предикатов $P(x, y)$ означает, что x — родитель y ; $M(x)$ означает, что x — мужского пола; $S(x, y)$ означает, что x и y состоят в браке. Записать формулу логики предикатов с одной свободной переменной x , которая была бы истинна в I тогда и только тогда, когда у x есть как минимум две внучки, но нет ни одного внука.
9. Проверить, будет ли истинна следующая формула на алгебраической системе $(R, <, +, -, x, 0)$, ответ пояснить.
 $(\forall x)(0 < x \wedge (\exists y)(\exists z)(0 < y \wedge 0 < z \wedge (\forall u)(u \times u + z < u \times y \wedge 0 < u \wedge u < x)))$.
10. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык L в алфавите $\{0, 1\}$:

$$L = \{w : w \text{ содержит подслово } 001 \text{ или подслово } 110\}.$$

11. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает пересечение языка

$$L = \{w : w \text{ начинается с } 0 \text{ и не содержит подслово } 00\}$$

с языком

$$L' = \{w : w \text{ содержит четное число единиц}\}.$$

12. Является ли автоматным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$:

$$L = \{w c w^{-1} : w = b a^2 b a^n b \text{ для некоторого } n > 0\}$$

Ответ обоснуйте.

13. Построить структурированную программу, вычисляющую в z функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} \overline{\overline{y}} \lfloor \overline{2x} \rfloor, & \text{если } 2x > y \\ (y + x)^2, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

14. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + 1 & \text{если } x > y + 1 \\ 2 * y & \text{противном случае} \end{cases}$$

и обосновать правильность построения (исходные данные и результаты в унарном кодировании).

Требования к рейтинг контролю (1 семестр)

Контрольная работа 1. Темы: метод математической индукции, комбинаторика. Пример задания:

- Доказать, что $1^2 \times 2^0 + 2^2 \times 2^1 + 3^2 \times 2^2 + \dots + n^2 \times 2^{n-1} = (n-1)^2 \times 2^n + 2^{n+1} - 3$.
- Одиннадцать человек — 5 женщин и 6 мужчин нужно рассадить за круглым столом так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом. Сколькими способами это можно сделать?
За решение каждой задачи выставляется максимум 4 балла.

Контрольная работа 2. Темы: логика высказываний, булевы функции. Пример

задания:

- Обозначить элементарные высказывания из следующего текста с помощью пропозициональных переменных. Записать формулу логики высказываний, отражающую содержание этого текста.
Чтобы получить пятерку по биологии Коле нужно сделать хотя бы два из трех заданий: поймать 85 живых шершней, вырастить 8 скорпионов или откормить полоза до длины полтора метра. За шершнями нужно отправиться в лес или на пасеку, за скорпионами или полозом — в магазин «Домашний любимец». Кроме того, чтобы кормить скорпионов или полоза тоже придется ходить в этот магазин или на ближайшую свалку.
- Построить таблицу истинности для формулы $(a \vee \neg b) \wedge (\neg c)$.
- Построить для формулы из п.2 эквивалентные совершенную КНФ, совершенную ДНФ, сокращенную ДНФ и многочлен Жегалкина.
- При лексикографическом упорядочении наборов аргументов булевы функции f и g задаются следующими значениями: $f = (00011111)$, $g = (01011010)$. Проверить для каждой из функций все пять свойств, упоминаемых в теореме Поста. Сделать вывод о полноте или неполноте множества $\{f, g\}$. Если это множество полно, показать, как можно представить отрицание и конъюнкцию (или дизъюнкцию). Если неполно — указать, какая булева функция не может быть построена.
За решение каждой задачи выставляется максимум 4 балла.

Контрольная работа 3. Темы: логика предикатов. Пример задания:

1. Предметной областью является множество точек на евклидовой плоскости; $L(x, y, z)$ означает, что точки x, y, z попарно различны и лежат на одной прямой, причем y — между x и z ; $E(x, y, z, u)$ означает, что длины отрезков xu и zu равны.

Записать формулу, имеющую три свободные переменные a, b, c и означающую, что угол abc является прямым, а отрезок ab короче bc . Пояснить значение отдельных частей формулы.

2. Предметной областью является множество действительных чисел, $A(x, y, z)$ означает $x + y = z$, $M(x, y, z)$ означает $x \cdot y = z$. Определить, будет ли в такой интерпретации истинна следующая формула, ответ пояснить:

$$(\forall x)(\forall y)(M(y, y, x) \wedge (\forall z)(M(z, z, x) \wedge y = z))$$

За решение каждой задачи выставляется максимум 4 балла.

Общая сумма В сумме за все задачи выставляет не более 30 баллов.

За работу на практических занятиях (решение задач у доски, выполнение домашних заданий) выставляется максимум 30 баллов.

За ответ на экзамене выставляется максимум 40 баллов.

Требования к рейтинг контролю (2 семестр)

Контрольная работа 1. Темы: графы, деревья. Пример задания:

1. Дан неориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{(a, b, 1), (a, f, 1), (a, h, 1), (b, d, 5), (b, e, 3), (b, f, 4), (b, h, 3), (c, d, 2), (c, e, 2), (c, f, 3), (c, g, 4), (d, f, 2), (d, g, 4), (d, k, 1), (e, f, 2), (e, g, 5), (f, g, 2), (g, h, 5)\}$ (третий элемент указывает вес соответствующего ребра). Построить матрицу смежности графа, изобразить граф. Раскрасить вершины графа в минимально возможное число цветов, проверить, будет ли граф эйлеровым (полуэйлеровым).
2. Для графа из предыдущей задачи сделать на выбор одно из двух заданий: с помощью алгоритма Крускала по шагам построить минимальное остовное дерево или с помощью алгоритма поиска в глубину по шагам построить остовное дерево, начиная с вершины a .
3. Дан ориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{(a, c, 5), (a, d, 4), (b, a, 2), (b, d, 4), (b, e, 2), (b, g, 3), (c, b, 7), (c, d, 2), (d, a, 2), (d, g, 3), (d, k, 3), (e, a, 2), (e, g, 3), (f, b, 5), (f, c, 4), (f, g, 3), (f, k, 5), (g, c, 7)\}$ (третий элемент указывает вес соответствующего ребра). Построить матрицу смежности графа, изобразить граф. Найти компоненты сильной связности.
4. Для графа из предыдущей задачи с помощью алгоритма Дейкстры по шагам найти кратчайшие пути из вершины f во все остальные.

За решение каждой задачи выставляется максимум 4 балла.

Контрольная работа 2. Темы: конечные автоматы, регулярные выражения.

Пример задания:

1. Для следующего языка L в алфавите $\{a, b, c\}$ построить детерминированный конечный автомат, который распознает L , и регулярное выражение, которое задает L . Пояснить.

$L = \{w : \text{в слове } w \text{ последняя буква совпадает с одной из двух первых, а непосредственно перед любым фрагментом вида } a a a \text{ обязательно стоит } b\}$

2. Доказать, что следующий язык K в алфавите $\{a, b\}$ не является автоматным:

$$K = \{a^m b^{3n} a^{2n} : n, m \in \mathbb{N}, m \leq 100\}$$

За решение каждой задачи выставляется максимум 4 балла.

Контрольная работа 3. Темы: машины Тьюринга. Пример задания:

1. Написать машину Тьюринга, которая по входу, состоящему из нескольких чисел в унарной записи, проверяет образуют ли они строго возрастающую последовательность. Можно расширять используемый алфавит.
2. Машина Тьюринга с копированием способна дополнительно выполнять команду вида: q, a, p , сору (в текущую позицию вставляется новая ячейка с символом a , правая часть ленты сдвигается вправо, головка оказывается в новой ячейке). Доказать, что любая вычислимая на машине Тьюринга с копированием функция вычислима и на обычной машине.

За решение каждой задачи выставляется максимум 4 балла.

Общая сумма В сумме за все задачи выставляет не более 30 баллов.

За работу на практических занятиях (решение задач у доски, выполнение домашних заданий) выставляется максимум 30 баллов.

За ответ на экзамене выставляется максимум 40 баллов.

VII. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине Для аудиторной работы

Наименование помещений	Материально-техническое оснащение помещений
Ауд.304 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Ауд. 304 приспособлена для проведения лекционных занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации и оснащена набором учебной мебели, меловой доской, проекционным оборудованием (мультимедийный проектор Casio XJ-N2650 с потолочным креплением и моториз.экраном), звуковым оборудованием (радиосистема Shure PG288/PG58, петличный радиомикрофон AKG WMS40Pro, стационарный микрофон SOUNDKING EG002 с настольным держателем, усилитель Roxton AA-120, микшер Mackie 402 VLZ, акустическая система Roxton MS-40T 000000000008641 (4 шт.)), ноутбуком ASUS N45SF, шкафом напольным 19”.
Ауд. 205 (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Ауд. 205 приспособлена для проведения лекционных и семинарских занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации и оснащена набором учебной мебели и меловой доской.

Для самостоятельной работы

Наименование помещений	Материально-техническое оснащение помещений
Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) (170002, Тверская обл., г. Тверь, пер. Садовый, д. 35)	Ауд. 201а (компьютерная лаборатория ПМиК) оснащена персональными ЭВМ (компьютер ПЭВМ «ХОПЕР» IS09001: 1.1/Intel Core i3-540/IntelH55-MLX/Unix-11.4/DVD RW Sony/Монитор 21,5” АОС TFT/клавиатура/мышь — 10 штук) с доступом к сети Интернет и необходимым программным обеспечением, системным блоком BASE P4 3200MHz 800 512K/1024 Mb DDR400/400Gb, концентратором сетевым DFE-916 DX HUB 16x10/100.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесённых изменений	Дата и протокол п/п заседания кафедры, утвердившего изменения
---	------------------------------	---