

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 04.10.2023 18:47:00
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»



Утверждаю:
Руководитель ООП

А.В. Язенин
А.В. Язенин /

«*19*» *февраля* 2020 года

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Направление подготовки
01.03.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Профиль подготовки
Системный анализ

Для студентов 1-го курса
Форма обучения – очная

Составитель:

к.ф.-м.н. М.Н. Рыбаков

Тверь, 2020

I. Аннотация

1. Цели и задачи дисциплины

Целями и задачами освоения дисциплины являются освоение ключевых понятий, вопросов теории, формирование умения применять знания, связанные с линейной алгеброй и геометрией, решать стандартные задачи, давать интерпретацию полученным результатам.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Данная дисциплина относится к разделу «Математический» обязательной части Блока 1.

Предварительные знания, необходимые для освоения дисциплины — знания, полученные при изучении школьной программы по алгебре и геометрии.

Освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее для дисциплин: общая алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, методы оптимизации и ИСО.

3. Объем дисциплины: 11 зачетных единиц, 396 академических часов, в том числе:

контактная аудиторная работа: лекции 93 часа, в т.ч. практическая подготовка 2 часа, практические занятия 93 часа;

контактная внеаудиторная работа: контроль самостоятельной работы 10 часов, в том числе курсовая работа 10 часов;

самостоятельная работа: 200 часов, в том числе контроль 68 часов.

4. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук</p> <p>ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности</p> <p>ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности</p>

5. Форма промежуточной аттестации и семестр прохождения: экзамен, курсовая работа, 1 семестр; экзамен, 1, 2 семестр.

6. Язык преподавания – русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)			Контроль самостоятельной работы (курсовая работа)	Самостоятельная работа, в том числе контроль (час.)
		Лекции		Практические занятия		
		все-го	в т.ч. практическая подготовка			
1. Алгебра матриц	22	5	1	5	2	10

2. Системы линейных уравнений. Определители.	86	20	0	20	8	38
3. Матричные модели.	7	2	1	2	0	3
4. Комплексные числа	29	8	0	8	0	13
5. Многочлены	33	10	0	10	0	13
6. Линейное пространство. Линейное отображение	55	16	0	16	0	23
7. Евклидово пространство	29	6	0	6	0	17
8. Векторная алгебра	31	6	0	6	0	19
9. Прямая и плоскость.	60	12	0	12	0	36
10. Билинейные и квадратичные формы	44	8	0	8	0	28
ИТОГО	396	93	2	93	10	200

Программа учебной дисциплины

Алгебра матриц

1. Матрица. Основные понятия: элемент; строка, столбец; номер строки, столбца; размер матрицы; индексы элемента.

Виды матриц: квадратная, прямоугольная, матрица строка, матрица столбец, треугольная, трапециевидная (ступенчатая), диагональная, единичная, нулевая.

2. Операции над матрицами: сложение (вычитание) матриц; умножение матрицы на число; умножение матриц, возведение в степень; транспонирование. Каковы условия на размеры матриц для выполнения операций? Каков

размер полученной матрицы? Правила выполнения операций. Свойства операций.

Системы линейных уравнений. Определители.

1. Определитель матрицы. Методы нахождения определителя:
 - 1.1. Нахождение определителя матриц 1-го, 2-го, 3-го порядка по формуле.
 - 1.2. Минор. Алгебраическое дополнение. Нахождение определителя разложением по строке, столбцу.
 - 1.3. Общее определение определителя. Свойства определителя. Определитель треугольной матрицы. Элементарные операции. Нахождение определителя приведением к треугольному виду.
2. Обратная матрица. Вырожденная и невырожденная матрицы. Когда возможно нахождение обратной матрицы? Нахождение обратной матрицы с использованием присоединенной матрицы, метод Гаусса.
3. Ранг матрицы. Определение. Нахождение ранга матрицы по определению. Элементарные операции, их использование для нахождения ранга матрицы приведением к ступенчатому виду.
4. Системы линейных уравнений. Матричная запись линейной системы, матрица коэффициентов системы, столбец свободных членов, столбец неизвестных. Однородная и неоднородная системы.

Решение системы. Совместная и несовместная системы. Определенная и неопределенная системы.
5. Методы исследования и нахождения решений систем:
 - 5.1. С использованием обратной матрицы.
 - 5.2. По формуле Крамера.
 - 5.3. Метод Гаусса. Элементарные преобразования. Теорема Кронекера-Капелли: условие, при котором система совместна, несовместна. Совместные системы: условие, при котором система определена, неопределенна (базисные и свободные неизвестные). Решение систем методом Гаусса.

6. Структура общего решения неоднородной системы: частное решение неоднородной системы, общее решение однородной системы, фундаментальная система решений, количество элементов в ФСР, нахождение ФСР однородной системы.

Матричные модели. Балансовые экономические модели. Модель и матрица Лесли.

Комплексные числа

1. Декартово произведение. Понятие алгебраической операции. Определение поля. Примеры. Поле комплексных чисел. Представление комплексных чисел в виде упорядоченной пары.
2. Алгебраическая форма представления комплексных чисел. Представление чисел на комплексной плоскости. Выполнение операций в алгебраической форме. Комплексно-сопряженные числа: свойства.
3. Модуль и аргумент комплексного числа. Свойства модуля. Представления комплексных чисел в геометрической и экспоненциальной форме. Формула Муавра. Корни n -ой степени из комплексного числа.

Многочлены

1. Кольцо. Определение многочлена n -ой степени. Кольцо многочленов.
2. Теорема о делении многочлена на многочлен с остатком. Определение делимости многочлена на многочлен. Делитель. Теоремы. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
3. Определение корня многочлена. Теорема Безу и следствие из неё. Схема Горнера.
4. Основная теорема алгебры (без доказательства). Разложение многочлена в произведение неприводимых над полем комплексных чисел и над полем действительных чисел многочленов.
5. Кратные корни. Нахождение порядка кратности.

6. Рациональные дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.

Линейное пространство. Линейное отображение.

1. Определение, аксиомы, следствия, свойства. Примеры линейных пространств. Понятия: линейная комбинация, линейная оболочка, линейная зависимость и независимость, базис, размерность пространства, разложение по базису, координаты разложения. Изоморфность.
2. Подпространство. Сумма и пересечение подпространств, их построение. Формула Грассмана. Связь между размерностями подпространств и размерностями их суммы и пересечения. Прямая сумма подпространств.
3. Замена базиса. Матрица перехода. Утверждение: $T_{a \rightarrow e} \cdot T_{e \rightarrow a} = E$. Следствия. Изменение координат вектора при переходе к другому базису.
4. Понятие линейного отображения. Ядро и образ линейного отображения. Ранг и дефект линейного отображения. Матрица линейного преобразования в базисе. Изменение координат вектора при действии на него линейного отображения. Изменение матрицы отображения при переходе к другому базису.
5. Теорема Жордана (без доказательства). Собственные числа и собственные вектора линейного отображения.

Евклидово пространство

1. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений, евклидовых пространств. Длина вектора. Теорема Пифагора, неравенство Коши Буняковского, неравенство Минковского (треугольника). Угол между векторами, ортогональность векторов, ортонормированность.
2. Существование ортонормированного базиса. Метод ортогонализации Грама Шмидта. Пример.
3. Выражение скалярного произведения через координаты в евклидовом пространстве. Матрица Грама. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Разложение вектора по базису евклидова пространства.

Векторная алгебра

1. Декартова система координат. Точка. Координаты точки. Расстояние между точками.
2. Вектор. Основные понятия и определения. Нахождение координат вектора AB по координатам точек начала $A(x_a, y_a, z_a)$ и конца $B(x_b, y_b, z_b)$. Сложение, вычитание векторов, умножение вектора на число. Алгебраическое и геометрическое выполнение операций.
3. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость векторов. Матричная запись линейной комбинации векторов, исследование на линейную и независимость, примеры. Базис. Разложение вектора по базису, нахождение координат разложения вектора по базису.
4. Скалярное произведение векторов в ортонормированной системе координат. Определение, свойства скалярного произведения. Использование для нахождения угла между векторами. Условие перпендикулярности векторов. Проекция вектора на вектор.
5. Векторное произведение векторов в ортонормированной системе координат: определение, свойства, геометрический смысл. Нахождение вектора перпендикулярного двум заданным векторам. Площадь параллелограмма, треугольника.
6. Смешанное произведение векторов в ортонормированной системе координат: определение, свойства, геометрический смысл. Объем параллелепипеда, пирамиды.
7. Коллинеарность и компланарность векторов. Методы исследования на коллинеарность и компланарность.

Прямая и плоскость.

1. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Уравнение прямой в отрезках. Геометрический смысл параметров в

уравнении прямой в отрезках. Каноническое уравнение прямой. Понятие направляющего вектора. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Направляющий вектор. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. Геометрическая интерпретация системы двух линейных уравнений, решения системы.

2. Прямая в пространстве. Общее уравнение прямой в пространстве. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Параметрическое уравнение прямой в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
3. Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Общее уравнение плоскости. Нормаль к плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам. Взаимное расположение плоскостей. Определение угла между плоскостями; формула вычисления угла между плоскостями. Условие параллельности двух плоскостей; нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости. Пересечение прямой и плоскости в пространстве.

Билинейные и квадратичные формы.

- 1 Линейная функция и линейная форма. Билинейная функция. Билинейная и квадратичная формы.
2. Приведение квадратичной формы к главным осям. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.
- 3 Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

4. Кривые второго порядка. Геометрическое определение и каноническое уравнение эллипса. Параметры. Геометрическое определение и каноническое уравнение гиперболы. Параметры. Геометрическое определение и каноническое уравнение параболы. Параметры. Кривые второго порядка. Инварианты. Определение типа кривой. Перенос и поворот системы координат. Приведение к каноническому виду. Уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат.
5. Кривые второго порядка в пространстве. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Основные поверхности. Определение эллипсоида, уравнение сферы, основные параметры сферы и эллипсоида. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида; уравнения поверхностей вращения вокруг осей координат. Приведение к каноническому виду выделением полных квадратов. Нахождение уравнений кривых, полученных пересечением поверхности второго порядка плоскостями, параллельными плоскостям координат.

III. Образовательные технологии

Учебная программа – наименование разделов и тем	Вид занятия	Образовательные технологии
1. Алгебра матриц	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
2. Системы линейных уравнений. Определители	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
3. Матричные модели	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
4. Комплексные числа	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

5. Многочлены	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
6. Линейное пространство. Линейное отображение	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
7. Евклидово пространство	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
8. Векторная алгебра	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
9. Прямая и плоскость	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач
10. Билинейные и квадратичные формы	Лекции, практические занятия	1. Изложение теоретического материала 2. Решение задач

Преподавание учебной дисциплины строится на сочетании лекций, практических занятий и различных форм самостоятельной работы студентов. В процессе освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии, способы и методы формирования компетенций: традиционные лекции, практические занятия в диалоговом режиме, выполнение индивидуальных заданий в рамках самостоятельной работы.

Дисциплина предусматривает выполнение контрольных работ, письменных домашних заданий, курсовой работы.

IV. Оценочные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

1. Изложить методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Дать определения понятия линейной комбинации, линейной зависимости и независимости векторов. Изложить методы исследования.
3. Дать определения различных видов записи прямой. Как они используются.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Дан правильный развернутый ответ – 2 балла;

Ответ содержит неточности – 1 балл.

ОПК-1.2 Использует базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности, вносит некоторые коррективы при их использовании в профессиональной деятельности

1. Решить систему

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Доказать, что вектора v_1 , v_2 , v_3 линейно независимы

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 3) Написать вектор b задачи в виде линейной комбинации векторов v_1 , v_2 , v_3

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4). Даны точки $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$. Выписать уравнение прямой проходящей через эти точки.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задание выполнено полностью – 10 баллов.

Задание выполнено частично – от 4 до 9 баллов.

Выполнены отдельные элементы – от 1 до 3 баллов.

Задание не выполнено 0 баллов.

ОПК-1.3 Применяет и адаптирует фундаментальные понятия и результаты в области математических и естественных наук к решению задач профессиональной деятельности

1. При каких параметрах выполнимы действия

$$P_{[5 \times v]} W_{[7 \times x]} - 7Q_{[5 \times r]}^T = G_{[h \times c]}? \text{ Каковы размеры результирующей матрицы?}$$

Ответ обосновать.

2. Можно ли решать систему

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

по формуле Крамера, с использованием обратной матрицы и методом Гаусса? Решить систему возможными методами.

3. Доказать, что вектора v_1 , v_2 , v_3 линейно зависимы: привести пример не всех равных нулю коэффициентов, при которых линейная комбина-

ция векторов v_1, v_2, v_3 равна нулю, и выписать соответствующую линейную комбинацию.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

3. Даны точки $A(-1, 1), B(2, -1)$. Выписать уравнение прямой проходящей через эти точки и дать пример применения записи для решения задачи исследования.

Способ проведения – письменный.

Критерии оценивания:

Задание выполнено полностью – 10 баллов.

Задание выполнено частично – от 4 до 9 баллов.

Выполнены отдельные элементы – от 1 до 3 баллов.

Задание не выполнено 0 баллов.

V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1) Рекомендуемая литература

а) Основная литература

1. Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник / 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юнити-Дана, 2015. - 719 с. ISBN 5-238-00754-X [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114717>
2. Никонова Н. В. Краткий курс алгебры и геометрии: примеры, задачи, тесты: учебное пособие, 2014. - 100 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428767>

б) Дополнительная литература

3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=30198

4. Ляпин, Е.С. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 368 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=246

2). а) Лицензионное программное обеспечение

<p>Компьютерный класс факультета прикладной математики и кибернетики № 46 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</p>	<p>Adobe Acrobat Reader DC – Russian – бесплатное ПО; Apache Tomcat 8.0.27 – бесплатное ПО; Cadence SPB/OrCAD 16.6 - Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009; GlassFish Server Open Source Edition 4.1.1 – бесплатное ПО; Google Chrome – бесплатное ПО; Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit) – бесплатное ПО; JetBrains PyCharm Community Edition 4.5.3 – бесплатное ПО; JetBrains PyCharm Edu 3.0 – бесплатное ПО; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – бесплатное ПО; Lazarus 1.4.0 - бесплатное ПО; MATLAB R2012b – Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012; Mathcad 15 M010 – Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011; Microsoft Office профессиональный плюс 2013 – Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017; Microsoft SQL Server 2014 Express LocalDB - бесплатное ПО; Microsoft Visio Professional 2013 - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017; MS Visual Studio Ultimate 2013 с обновлением 4 - Акт предоставления прав № Tr035055 от 19.06.2017; MiKTeX 2.9 – бесплатное ПО;</p>
--	---

	<p>MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK - бесплатное ПО; NetBeans IDE 8.0.2- бесплатное ПО; NetBeans IDE 8.2- бесплатное ПО; Notepad++ - бесплатное ПО; Oracle VM VirtualBox 5.0.2 - бесплатное ПО; Origin 8.1 Sr2 – договор №13918/M4 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»; Python 3.1 pygame-1.9.1 - бесплатное ПО; Python 3.4 numpy-1.9.2 - бесплатное ПО; Python 3.4.3 - бесплатное ПО; Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit) - бесплатное ПО; WCF RIA Services V1.0 SP2 - бесплатное ПО; WinDjView 2.1 - бесплатное ПО;</p> <p>MS Windows 10 Enterprise – Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017.</p>
<p>Компьютерный класс №1 факультета ПМиК №251 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)</p>	<p>Adobe Acrobat Reader DC – Russian – бесплатное ПО; Cadence SPB/OrCAD 16.6 - Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009; Google Chrome – бесплатное ПО;</p> <p>Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit) – бесплатное ПО; Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – бесплатное ПО; Lazarus 1.4.0 - бесплатное ПО;</p> <p>MATLAB R2012b – Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012;</p> <p>Mathcad 15 M010 – Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011;</p> <p>Microsoft Office профессиональный плюс 2013 – Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017;</p> <p>MS Visual Studio Ultimate 2013 с обновлением 4 - Акт предоставления прав № Tr035055 от 19.06.2017; MiKTeX 2.9 – бесплатное ПО;</p>

	<p>MPICH2 64-bit - бесплатное ПО;</p> <p>MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK - бесплатное ПО;</p> <p>NetBeans IDE 8.0.2- бесплатное ПО;</p> <p>Notepad++ - бесплатное ПО;</p> <p>OpenOffice - бесплатное ПО;</p> <p>Origin 8.1 Sr2 – договор №13918/М4 от 24.09.2009 с ЗАО «СофтЛайн Трейд»;</p> <p>Python 3.4.3 - бесплатное ПО;</p> <p>Python 3.5.1 (Anaconda3 2.5.0 64-bit) - бесплатное ПО;</p> <p>WCF RIA Services V1.0 SP2 - бесплатное ПО;</p> <p>WinDjView 2.1 - бесплатное ПО;</p> <p>MS Windows 10 Enterprise – Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017.</p>
--	---

б) Свободно распространяемое программное обеспечение

3) Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ЭБС «**ZNANIUM.COM**» www.znanium.com;
2. ЭБС «**Университетская библиотека онлайн**» <https://biblioclub.ru/>;
3. ЭБС «**Лань**» <http://e.lanbook.com>.

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)

Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)

4) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Виртуальная образовательная среда ТвГУ (<http://moodle.tversu.ru>)

Научная библиотека ТвГУ (<http://library.tversu.ru>)

VI. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

В каждом семестре проводятся 3 контрольных мероприятия: (1-й модуль) решение индивидуальных заданий, контрольная, (2-й модуль) решение индивидуальных заданий, контрольная, (3) экзамен.

Распределение баллов: 30/30/40.

Тематика курсовых работ по предмету (1 семестр):

Исследование системы линейных уравнений на совместность.

Нахождение решений в каждом случае совместности.

Типовые задания для практических занятий, домашней работы и рейтингового контроля

Раздел содержит темы и типовые задачи практических/семинарских занятий и самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины. Типовые задания для проведения рейтингового контроля и контроля самостоятельной работы.

Алгебра матриц. Системы линейных алгебраических уравнений.

1) При каких параметрах выполнимы действия $P_{[5 \times v]} W_{[7 \times x]} - 7 Q_{[5 \times r]}^T = G_{[h \times c]}$?

Каковы размеры результирующей матрицы? Ответ обосновать.

2) Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1) Найти матрицу $R_{[? \times ?]} = A_{[3 \times 3]} B_{[3 \times 2]} - 2C_{[3 \times 2]}$.

2.2) Найти матрицу $R_{[? \times ?]} = B_{[3 \times 2]} (C_{[3 \times 2]})^T + (A_{[3 \times 3]})^T$.

3) Найти определитель матрицы A :

- по формуле треугольников;
- разложением по строке или столбцу;
- приведя треугольному виду.

4) Решить системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

4.1) найдя обратную матрицу;

4.2) по формуле Крамера;

4.3) методом Гаусса.

5) Решить системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = -7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

5.1) методом Гаусса;

5.2) можно ли найти решение этих систем с использованием обратной матрицы, формулы Крамера ?

6) Дана система

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.1) При каком параметре a система не имеет решений.

6.2) Решить, используя формулу Крамера при $a=1$.

6.3) Решить методом Гаусса при $a=1$.

Комплексные числа

1. Для числа $z = -1 - \sqrt{3}i$

1.1. Нанести приближенно число z на комплексной плоскости, выделить модуль и аргумент;

1.2. Написать это число в тригонометрической и экспоненциальной форме;

1.3. Используя формулу $f(x)$ Муавра, написать выражение z^k и всех корней $\sqrt[k]{z}$.

Многочлены

1. Написать многочлен минимальной степени с комплексными коэффициентами с корнем $x_{1,2} = -1$ кратности 2 и комплексным корнем $1 - i$ в виде произведения и в развернутой форме, найдя его коэффициенты по теореме Виета.
2. Написать многочлен минимальной степени с действительными коэффициентами с корнем $x_{1,2} = -1$ кратности 2 и комплексным корнем $1 - i$ в виде произведения и в развернутой форме. Используя теорему Безу, найти число, которое является остатком от деления этого многочлена на $x-1$.
3. Даны многочлены $f(x) = x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 40x^2 - 44x - 16$;
 $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
 - 3.1. Используя алгоритм Евклида, найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.
 - 3.2. Найти корни многочлена $g(x)$ (использовать метод Горнера), выпписать многочлен $g(x)$ в виде произведения сомножителей.
 - 3.3. Выполнить деление остатком $f(x)$ на $g(x)$, найти частное и остаток, записать результат в виде $f(x) = \varphi(x)g(x) + r(x)$; записать представление рациональной дроби $f(x)/g(x)$ в виде многочлена и правильной дроби;
4. Найти представление рациональной дроби (дробно-рациональной функции) $Q(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-2)^2(x-1)}$ в виде суммы простейших дробей;
5. Является ли $x_0 = 2$ корнем многочлена $h(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, какой кратности? (использовать критерий с нахождением производных),

6. Используя производные, представить $h(x)$ в виде конечной суммы ряда

$$\text{Тейлора } \sum_{k=0}^3 a_k (x-1)^k .$$

Точка, отрезок, прямая на плоскости.

Даны точки $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(-2, -2)$.

1. Нарисовать точки A , B , C . Найти расстояние между точками A и B .
2. Написать уравнение прямой L , проходящей через точки A , B .
3. Написать уравнение прямой L в общем виде. Используя формулу расстояния от точки до прямой, найти расстояние от точки C до прямой L .
4. Написать уравнение прямой L в отрезках. Нарисовать прямую L .
5. Написать направляющий вектор \overrightarrow{AB} прямой L . Написать уравнение прямой L в параметрическом виде.
6. Написать уравнение прямой L с угловым коэффициентом. Чему равен угловой коэффициент?
7. Написать уравнение прямой L_1 , проходящей через точку C , которая параллельна прямой L .
8. Написать уравнение прямой L_2 , проходящей через точку C , которая перпендикулярна прямой L . Нарисовать прямую L_2 .
9. Найти координаты середины отрезка AB . Нанести эту точку на отрезок AB . Написать уравнение прямой L_3 – медианы треугольника ABC , проходящей через точку C .

Плоскость. Прямая в пространстве.

Даны точки $A(-1, 1, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $D(0, 0, 2)$, $C(-2, -2, 0)$.

- 1.1. Написать уравнение плоскости π , проходящей через точки A , B , D .
- 1.2. Написать уравнение плоскости π в общем виде. Найти расстояние от плоскости π до начала координат.

- 1.3. Написать уравнение плоскости π в отрезках. Нарисовать фрагмент плоскости.
- 1.4. Написать уравнение плоскости π_1 , проходящую через начало координат параллельно плоскости π .
- 1.5. Написать уравнение прямой L , проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости π . Найти координату точки пересечения прямой L и плоскости π .
2. Написать уравнение плоскости π , проходящей через точки $A(6, 0, 3)$, $B(0, -6, -1)$, $C(-3, -3, -1)$ в общем виде. По формуле расстояния от точки до плоскости найти расстояние от точки $(-3, 0, \sqrt{11})$ до плоскости π .
3. Написать параметрическое уравнение прямой L , проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости π . Найти точку пересечения прямой L и плоскости π .

Векторная алгебра

Даны точки $A(-1, 1, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $D(0, 0, 2)$, $C(-2, -2, 0)$.

1. Найти вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} и нарисовать на плоскости Oxy . Найти $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (нарисовать на плоскости Oxy), $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (нарисовать), $-2\overrightarrow{AB}$ (нарисовать), $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
2. Найти скалярное произведение векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Чему равен косинус угла между ними?
3. Найти векторное произведение векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Чему равна площадь треугольника ABC ?
4. Найти смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} . Чему равен объем пирамиды $ABCD$.
5. Даны вектора: $\vec{a} = [1, 1]$ и $\vec{b} = [\alpha, 2]$: при каком значении α вектора ортогональны? коллинеарны? чему равен угол между векторами, если $\alpha = 0$?

6. Даны точки $A(0, 1, 1)$, $B(3, 1, 1)$, $C(1, 0, 2)$: найти вектора \vec{AB} , \vec{AC} ; используя векторное произведение, найти нормаль к плоскости треугольника ABC .; найти площадь треугольника ABC .
7. Даны вектора: $\vec{a} = [1, 0, 3]$, $\vec{b} = [1, 1, 0]$, $\vec{c} = [-3, 1, \alpha]$: найти смешанное произведение векторов; при каком α они компланарны; каков объем параллелепипеда, построенного на векторах, если $\alpha = 0$.

Кривые и поверхности второго порядка. Приведение к каноническому виду.

1. Определить тип кривой $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$. Привести к каноническому виду.
2. Нарисовать канонические оси. Найти и нанести вершины. Найти и нанести фокусы. Найти эксцентриситет. Найти и нанести директрисы.
3. Привести к каноническому виду $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$. Какие координаты центра новой системы координат?
4. Найти вершины $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$, нарисовать в канонических координатах эллипс $4\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 = 36$. Найти параметры: координаты фокусов $(\pm c, 0)$, эксцентриситет ε , директрисы.
5. Привести к каноническому виду $x^2 + y^2 - z^2 + 6x + 4y - 2z - 4 = 0$. Как называется эта поверхность?
Какая кривая лежит в сечении $x = -3$? Какое ее уравнение? Название?
Какая кривая лежит в сечении $z = -1$: какое ее уравнение? Название?
6. Каковы параметры сферы $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 9$: координаты центра $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиус R .

Примерный список вопросов на экзамен по темам: сформулирован в программе дисциплины в разделе II учебного плана.

Самостоятельная работа студентов включает проработку лекционного материала, подготовку к тестам промежуточного контроля, выполнение индивидуальных заданий.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Организуя свою учебную работу, студенты должны, во-первых, выявить рекомендуемый режим и характер учебной работы по изучению теоретического курса, практическому применению изученного материала, по выполнению заданий для самостоятельной работы, по использованию информационных технологий и т.д. Во-вторых, ознакомиться с указанным в методическом материале по дисциплине перечнем учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям и выполнения самостоятельной работы, а также с методическими материалами на бумажных и/или электронных носителях, выпущенных кафедрой своими силами и предоставляемые студентам во время занятий.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом, должна соответствовать более глубокому усвоению изучаемого курса, формировать навыки исследовательской работы и ориентировать студентов на умение применять теоретические знания на практике.

1. Работа с учебными пособиями.

Для полноценного усвоения курса студент должен, прежде всего, овладеть основными понятиями этой дисциплины. Необходимо усвоить определения и понятия, уметь приводить их точные формулировки, приводить примеры объектов, удовлетворяющих этому определению. Кроме того, необходимо знать круг фактов, связанных с данным понятием. Требуется также знать связи между понятиями, уметь устанавливать соотношения между классами объектов, описываемых различными понятиями.

2. Самостоятельное изучение тем.

Самостоятельная работа студента является важным видом деятельности, позволяющим хорошо усвоить изучаемый предмет и одним из условий достижения необходимого качества подготовки и профессиональной переподготовки специалистов. Она предполагает самостоятельное изучение студентом рекомендованной учебно-методической литературы, различных справочных материалов, написание рефератов, выступление с докладом, подготовку к лекционным и практическим занятиям, подготовку к зачёту и экзамену.

3. Подготовка к практическим занятиям.

При подготовке к практическим занятиям студентам рекомендуется следовать методическим рекомендациям по работе с учебными пособиями, приведенным выше.

4. Составление конспектов.

В конспекте отражены основные понятия темы. Для наглядности и удобства запоминания используются схемы и таблицы.

5. Подготовка к экзамену.

При подготовке к экзамену студенты должны использовать как самостоятельно подготовленные конспекты, так и материалы, полученные в ходе лекций.

VII. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория № 304 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска, проекционное оборудование (мультимедийный проектор Casio XJ-N2650 с потолочным креплением и моториз.экраном), звуковое оборудование (радиосистема Shure PG288/PG58, петличный радиомикрофон AKG WMS40Pro, стационарный микрофон SOUNDKING EG002 с настольным держателем, усилитель Roxton AA-120, микшер Mackie 402 VLZ, акустическая систе-
--	---

	ма Roxton MS-40T 000000000008641 (4 шт.)), ноутбук ASUS "N45SF", шкаф напольным 19".
Учебная аудитория № 206 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска, настенный экран Draper Luma MW 213*213, мультимедийный проектор ACER P5270 DLP, EYJ5501001729001465910.
Учебная аудитория № 212 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска, мультимедийный комплекс "I - Lerner .ru" в составе: проектор Epson EB -575 Wi, маркерная доска, панель управления Epson ELPCB02, запасная лампа, запасной фильтр для проектора.
Учебная аудитория № 205 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска.
Учебная аудитория № 206 (170002, Тверская обл., г.Тверь, Садовый переулок, д.35)	Набор учебной мебели, меловая доска, настенный экран Draper Luma MW 213*213, мультимедийный проектор ACER P5270 DLP, EYJ5501001729001465910.

VIII. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	I. 3. Объем дисциплины	Выделение часов на практическую подготовку	От 29.10.2020 года, протокол № 3 ученого совета факультета
2.	II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них	Выделение часов на практическую подготовку по темам	От 29.10.2020 года, протокол № 3 ученого совета

	количества академических часов и видов учебных занятий		факультета
--	--	--	------------